

Dossier de candidature

David Manceau

Laboratoire Jean Kuntzmann
51 rue des mathématiques, B.P. 53
38041 Grenoble Cedex 9
Tel : 04 76 635 785

david.manceau@imag.fr
<http://d.p.manceau.free.fr/>

SOMMAIRE

Résumé	3
Curriculum Vitæ	5
Enseignements	8
Publications	10
Travaux de recherche	10
Projets de Recherche	15

RÉSUMÉ

David Manceau

Né le 24/09/79 à Le Mans (72)
12, Rue Gentil Bernard
38000 GRENOBLE Cedex
Tel : 06.10.89.19.97
<http://d.p.manceau.free.fr/>

ATER
Université Joseph Fourier Grenoble
Tour IRMA, Bureau 01
Tél : 04.76.63.57.85
Email : david.manceau@imag.fr

- **Situation Actuelle :**

ATER à temps partiel à l'IMAG, Université Joseph Fourier Grenoble.

- **Diplômes :**

Thèse de l'Université de Rennes 1 dirigée par Marc Briane, intitulée *Quelques problèmes d'homogénéisation à faible et fort contraste*, soutenue le 06 décembre 2007 devant le jury composé de D. Cioranescu, G. Francfort (Rapporteurs), F. Murat (Président), E. Bonnetier, F. Castella, P. Seppecher et N. Tchou (Examineurs).

- **Enseignements :**

ATER à temps partiel à l'IMAG (96h TD et TP) de septembre 2008 à août 2009, ATER à temps complet à l'Université de Rennes 2 (192h, cours magistraux et TD) de septembre 2007 à août 2008, et moniteur à l'INSA de Rennes (3x64h, TD et TP) de septembre 2004 à août 2007.

- **Publications :**

Trois articles parus dans des journaux internationaux avec comité de lecture :

Un article paru dans *M2AN*.

Un article en collaboration avec M. Briane et G. Milton paru dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

Un article en collaboration avec M. Briane paru dans *Networks and Heterogeneous Media*.

- **Mots clés :**

Théorie de l'homogénéisation, équations aux dérivées partielles, équations elliptiques, conduction, élasticité, effet Hall, fibres, relations de dualité, asymptotiques petit volume.

- **Contacts :**

Les personnes suivantes ont accepté d'être contactées pour donner leur avis sur ma candidature :

- Éric Bonnetier (Professeur, Université Joseph Fourier Grenoble) : Eric.Bonnetier@imag.fr
- François Castella (Professeur, Université de Rennes 1) : francois.castella@univ-rennes1.fr
- Gilles A. Francfort (Professeur, Université Paris Nord) : francfor@galilee.univ-paris13.fr
- François Murat (Directeur de recherches, Université Pierre et Marie Curie Paris VI) : murat@ann.jussieu.fr

CURRICULUM VITÆ

David Manceau

Né le 24/09/79 à Le Mans (72)

Adresse personnelle :

12, Rue Gentil Bernard

38000 GRENOBLE Cedex

Tel : 06.10.89.19.97

<http://d.p.manceau.free.fr/>

ATER

Université Joseph Fourier Grenoble

Tour IRMA, Bureau 01

Tél : 04.76.63.57.85

Email : david.manceau@imag.fr

ÉTUDES ET DIPLÔMES

2004-2007 **Doctorat de mathématiques et applications** de l'Université de Rennes 1.

Titre : *Quelques problèmes d'homogénéisation à faible et fort contraste.*

(détails dans la section Travaux de Recherche)

Directeur de thèse : Marc Briane.

Soutenue le 06 décembre 2007 devant le jury :

Mme	Doina CIORANESCU	Rapporteur
M.	Gilles FRANCFORT	Rapporteur
M.	François MURAT	Président
M.	Éric BONNETIER	Examineur
M.	François CASTELLA	Examineur
M.	Pierre SEPPECHER	Examineur
Mme	Nicoletta TCHOU	Examineur

Mention : *Très honorable.*

2003-2004 **DEA Mathématiques fondamentales et applications**, spécialité

“Analyse et Analyse Numérique”, à l'Université de Rennes 1, mention *Bien.*

Stage sous la direction de Marc Briane intitulé :

Introduction à la théorie des H -mesures et application à des formules d'homogénéisation en faible amplitude, d'après un article de Luc Tartar.

2002-2003 **Maîtrise de Mathématiques**, Université de Rennes 1, mention *Assez*

Bien.

TER sous la direction de Philippe Gaillard intitulé : *Introduction à la théorie de Galois différentielle.*

2001-2002 **Licence de Mathématiques**, Université du Maine, mention *Assez Bien.*

1999-2001 **DEUG MIAS**, Université du Maine, mention *Assez Bien.*

EXPÉRIENCE PROFESSIONNELLE

- 2008-2009** ATER à temps partiel à l'IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
2007-2008 ATER à temps complet à l'Université de Rennes 2.
2004-2007 Moniteur à l'INSA de Rennes.
-

EXPOSÉS DANS DES SÉMINAIRES ET WORKSHOPS

- Octobre 2008** *Homogénéisation de l'effet Hall bidimensionnel*. Séminaire LJK, équipes EDP-MOISE, Université Joseph Fourier Grenoble.
Février 2008 *Homogénéisation à faible contraste de matériaux fibrés non périodiques*. Groupe de Travail Numérique du Laboratoire de Mathématique d'Orsay, Université Paris-Sud.
Janvier 2008 *Homogénéisation à faible contraste de matériaux fibrés non périodiques*. Groupe de travail "Homogénéisation et échelles multiples", Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VI.
Mai 2006 *Introduction à la théorie de l'homogénéisation et applications*. Rencontres Doctoriales de Mathématiques, Université de Rennes 1, 11-12 mai 2006.
Mai 2005 *Comparison of two models of non-periodic fibrous materials in small amplitude homogenization*. Workshop INDAM "Recent Advances in Homogenization", Università di Roma La Sapienza, Rome, Italie, 23-27 mai 2005.
-

PARTICIPATION À DES CONGRÈS ET SÉMINAIRES SANS EXPOSÉ

- Cours de DEA niveau 2 (8 séances), "Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques complètement non linéaires" par Pierre Cardaliaguet, Université de Rennes 1, octobre-décembre 2003.
- Colloquium, séminaire d'analyse numériques et séminaire d'équations aux dérivées partielles de l'IRMAR, Université de Rennes 1, 2004-2008.
- Rencontre internationale "Régularité et singularités en optimisation de forme et frontières libres", organisée par GDR CNRS ANOFOR, l'ENS Cachan et l'IRMAR, antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, 21-23 octobre 2004.
- Workshop INDAM "Recent Advances in Homogenization", Università di Roma La Sapienza, Rome, Italie, 23-27 mai 2005.
- Série de 6 conférences de Luc Tartar à l'Université de Versailles Saint-Quentin, 12, 19 mai et 2, 9, 16, 23 juin 2005.
- Rencontres Doctoriales de Mathématiques, Université de Rennes 1, 11-12 mai 2006.
- Journée Rennes - Nantes 2007, antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, 25 janvier 2007.
- "Journées d'équipe d'Analyse Numérique" de l'Université de Rennes 1, 22 mars 2007, 25 octobre 2007.
- "Des équations aux dérivées partielles au calcul scientifique", congrès en l'honneur de Luc Tartar, Paris, 2-6 juillet 2007.

- “Journées de mathématiques appliquées”, congrès en l’honneur de François Murat, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6, 4-5 octobre 2007.
-

VULGARISATION SCIENTIFIQUE

- Mise en place d’un “club mathématique” au lycée Emile Zola de Rennes avec l’association de doctorants Binet.
 - Stages sur l’enseignement organisés par le CIES Grand Ouest dans le cadre du monitorat 2004-2005.
 - Réalisation d’un poster de vulgarisation pour les rencontres du CIES, juin 2006.
-

COMPÉTENCES INFORMATIQUES

- Utilisation des systèmes d’exploitation : UNIX, LINUX, WINDOWS.
- Programmation : Langages FORTRAN, JAVA, C++ , HTML.
- Logiciels de mathématiques : MAPLE, MATLAB.
- Traitements de texte : WORD, L^AT_EX.

ENSEIGNEMENTS

ATER à temps partiel (96h) à l'IMAG, Université Joseph Fourier Grenoble : septembre 2008-août 2009.

- **Calcul matriciel et fonctions de plusieurs variables en Licence 2** (TD - 36h).
Responsable du cours : Eric Bonnetier.
Déterminants, réduction de matrices, fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles, intégrales multiples.
- **Mathématiques approfondies pour l'ingénieur en Licence 2** (TD - 36h).
Responsable du cours : Stéphane Labbé.
Méthode des moindres carrés, interpolation polynomiale, séries de Fourier.
- **Outils mathématiques et méthodes numériques pour l'analyse de modèles utilisés en GDP en Licence 3 GSI** (TD - 26h et TP Matlab - 12h).
Responsable du cours : Emmanuel Maitre.
Systèmes différentiels, problèmes aux limites pour les équations différentielles, équations aux dérivées partielles.

ATER à temps complet (192h) à l'Université de Rennes 2 : septembre 2007-août 2008.

Pour chaque enseignement, j'avais en charge le cours magistral ainsi que le TD. Certains enseignements avaient lieu sous forme d'un cours-TD.

- **Algèbre en Licence 3 MASS** (CM - 16h équivalent TD et TD - 12h).
Réduction des endomorphismes, factorisation LU, décomposition en valeurs singulières (SVD).
- **Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales en Licence 1 AES** (CM/TD - 48h).
Fonctions affines, exemples de fonctions usuelles, application de la dérivée, fonctions de deux variables, optimisation sous contraintes.
- **Analyse en Licence 1 MASS** (CM - 36h équivalent TD et TD - 24h).
Formule de Taylor, développements limités, intégration des fonctions bornées, calcul de primitives.
- **UED préparation concours d'entrée IUFM** (CM/TD - 56h).
Rappels cours de base : calcul numérique, géométrie, arithmétique.

Moniteur à l'INSA de Rennes en 1er cycle (3x64h) : septembre 2004-août 2007.

- **TD Analyse en 2ème année.**
Responsables du cours : Jean-Pierre Yvon & Jean-Louis Merrien.
Fonctions de plusieurs variables réelles, intégrales généralisées et multiples.
- **TD et TP Maple Résolution d'équations et calcul formel en 1ère année.**
Responsable du cours : Paul Sablonnière.
Factorisation LU, méthode de Gauss-Jordan, équations différentielles linéaires.
- **TD Algèbre linéaire en 2ème année.**
Responsables du cours : Marc Briane & Mohamed Camar-Eddine.
Réduction des endomorphismes, équations différentielles linéaires, formes quadratiques.
- **TD Bases d'analyse réelle en 1ère année.**
Responsable du cours : Loïc Hervé.

Limites, continuité, suites réelles.

- **TD Algèbre linéaire en 1ère année.**

Responsable du cours : Marc Briane.

Espaces vectoriels, applications linéaires.

- **TD Calcul différentiel et intégral en 1ère année.**

Responsable du cours : Paul Sablonnière.

Développements limités, intégrale de Riemann, introduction aux intégrales généralisées et aux séries numériques.

PUBLICATIONS

- [P1] “Small amplitude homogenization applied to models of non-periodic fibrous materials”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 41 (2007), no. 6, pp. 1061-1087.
- [P2] “Duality results in the homogenization of two-dimensional high-contrast conductivities”, avec M. Briane, *Networks and Heterogeneous Media*, **3** (3) (2008), 509-522.
- [P3] “Homogenization of the two-dimensional Hall effect”, avec M. Briane & G.W. Milton, *J. Math. Ana. App.* 339 (2008), pp. 1468-1484.
- [P4] “Duality and compactness results in high-contrast homogenization of incompressible two-dimensional elasticity problems”. Soumis.
-

TRAVAUX DE RECHERCHE

Ma thèse a été consacrée à des problèmes d’homogénéisation d’équations de conduction et d’élasticité linéarisée, avec différentes thématiques : l’écriture de formules explicites en homogénéisation sous la forme de développements asymptotiques (section 1.1 et 3), certaines extensions de la H -convergence pour la conductivité bidimensionnelle (section 2) et l’apparition d’effets non-locaux dans l’homogénéisation de microstructures fibrées non périodiques (section 1.2). Toutes ces questions ont été abordées au travers de problèmes d’homogénéisation à faible et fort contraste, dans un cadre général en dimension 2 et, en dimension 3, en considérant des microstructures fibrées non périodiques. Ces problèmes et les résultats obtenus sont décrits ci-dessous.

1 Homogénéisation de matériaux fibrés non périodiques

Le ventricule gauche du cœur est formé de fibres orientées. Des études anatomiques ont montré que les fibres cardiaques ont une orientation qui varie continûment le long de la paroi ventriculaire. De nombreux modèles biomécaniques heuristiques (voir par exemple le modèle étudié par Peskin [23]) ont été étudiés en considérant ces fibres comme un matériau élastique orienté baignant dans un milieu homogène. En 1991, Briane [7], [8] a proposé deux modèles déduits rigoureusement de l’homogénéisation de microstructures fibrées non périodiques.

Pour les deux modèles (voir Figure 1), les fibres sont des cylindres de petit rayon ε distribués périodiquement (avec une période ε) dans des couches (modèle I) ou rangées (modèle II) avec une orientation des fibres constante dans chaque couche ou rangée.

Dans le modèle I , la largeur des couches (ε^α avec $0 < \alpha < 1$) tend vers zéro avec ε mais est très grande par rapport au rayon des fibres. Ainsi, les couches induisent une échelle intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique. Dans le modèle II , les couches sont réduites à des rangées dont la largeur est du même ordre que le rayon des fibres. Ainsi, dans ce deuxième modèle, il n’y a plus d’échelle intermédiaire et l’orientation des fibres varie de façon plus réaliste.

Dans les deux cas, la formule d’homogénéisation obtenue dans [7] est peu explicite puisqu’elle fait intervenir la solution d’un problème auxiliaire paramétré en chaque point du domaine. Il semble dès lors difficile de pouvoir comparer directement ces modèles entre

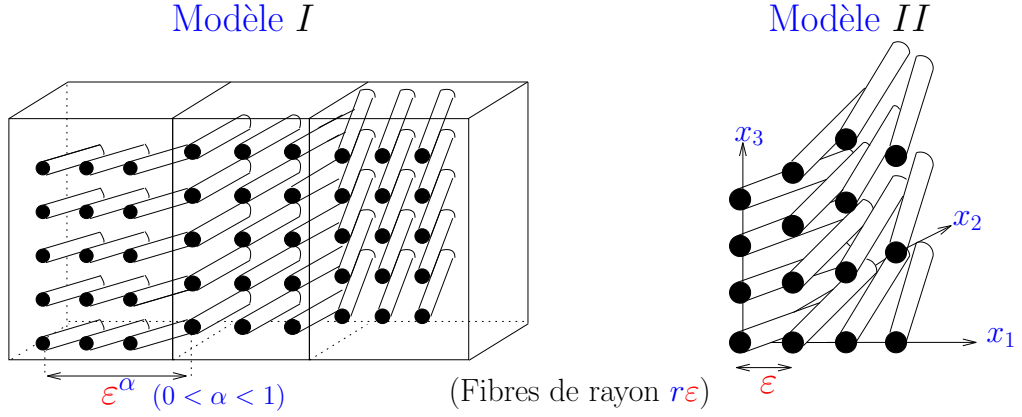


FIG. 1 – Les deux microstructures fibrées non périodiques

eux ainsi qu’avec ceux de biomécanique sans hypothèse supplémentaire. Mon travail a consisté à obtenir des résultats d’homogénéisation plus explicites pour ces deux microstructures en conduction et en élasticité linéarisée. En particulier, j’ai étudié les cas de faible et fort contraste.

1.1 Homogénéisation à faible contraste [P1]

Dans ce travail, notre but était d’obtenir des modèles homogénéisés simplifiés en considérant une hypothèse de faible contraste entre les caractéristiques physiques du milieu extérieur et des fibres. Pour cela, on se place dans le cadre de l’homogénéisation en petite amplitude (ou faible contraste) développée par Tartar [24, 25]. On y considère une suite A_ε de conductivités (ou de loi de Hooke dans le cas de l’élasticité linéarisée) uniformément bornée et équi-coercive, dépendant d’un petit paramètre δ et admettant un développement à l’ordre 2 en δ (dans les applications, le paramètre δ représente le contraste entre les caractéristiques physiques du milieu considéré). Le but est alors d’obtenir un développement asymptotique à l’ordre 2 en δ de la loi de comportement homogénéisée A_* .

Notons $\delta > 0$ le faible contraste (supposé isotrope) entre les caractéristiques des fibres et celles du milieu extérieur, *i.e.* $A_2 - A_1 = c\delta I_3$ où $c \in \mathbb{R}$ et A_1 et A_2 sont les conductivités du milieu extérieur et des fibres. En conduction isotrope, en utilisant la formule en petite amplitude de Tartar (Theorem 4.2 de [25]), j’ai montré que le modèle *I* à faible contraste donne la conductivité effective suivante :

$$A_*^I(x, \delta) = (c_1 + c_2\delta + c_3\delta^2)I_3 + c_4\delta^2(\tau(x) \otimes \tau(x)) + o(\delta^2), \quad (1)$$

où τ est la direction des fibres et les c_i des constantes indépendantes de δ . Ainsi, ce premier modèle homogénéisé coïncide, sous l’hypothèse de faible contraste (en négligeant les termes d’ordre plus grand que 2), avec l’analogie en conduction du modèle de biomécanique heuristique considéré par Peskin dans [23]. Pour le modèle *II* dans les mêmes conditions, j’ai obtenu une conductivité homogène différente :

$$A_*^{II}(x, \delta) = A_*^I(x, \delta) \oplus D_{\text{eff}}(x, \delta^2) + o(\delta^2), \quad (2)$$

i.e. la projection orthogonale de A_*^{II} sur l’espace vectoriel engendré par I_3 et $(\tau \otimes \tau)$ est exactement la conductivité effective A_*^I du premier modèle. De plus, la matrice supplémentaire D_{eff} s’annule dans les régions où les fibres sont d’orientation constante.

En élasticité isotrope, en utilisant la formule à faible contraste de Tartar (voir [24]), j'ai déduit des égalités (1) et (2) des développements similaires pour les modèles I et II , mais ces développements sont plus complexes que dans le cas de la conduction et diffèrent du modèle heuristique considéré par Peskin. En raison de cette complexité des modèles I et II en élasticité linéarisée en dépit de l'hypothèse de faible contraste, j'ai étudié un troisième modèle pour lequel je me suis focalisé sur une hypothèse d'anisotropie plutôt que sur la non périodicité. Dans ce modèle III , le milieu considéré est constitué d'un réseau périodique de fibres d'orientation constante τ et de loi de Hooke anisotrope. Précisément, on suppose que le tenseur des fibres \mathbf{A}^2 est déduit du tenseur isotrope \mathbf{A}^1 du milieu extérieur par une faible perturbation anisotrope dans la direction des fibres, c'est à dire :

$$\mathbf{A}^2 e := \mathbf{A}^1 e + \delta(e\tau \cdot \tau)(\tau \otimes \tau) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^1 e := \lambda_1 \text{tr}(e) + 2\mu_1 e, \quad \forall e \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}.$$

J'ai d'abord obtenu une nouvelle formule asymptotique générale qui étend au cas de l'élasticité anisotrope la formule d'homogénéisation à faible contraste obtenue par Tartar [24] dans le cas isotrope. Ensuite, grâce à cette formule à faible contraste anisotrope, j'ai déduit le développement suivant à l'ordre 2 en δ pour le tenseur des contraintes σ_*^{III} du modèle III :

$$\sigma_*^{III} = (c_1 + c_2\delta) e - \kappa(\nu, \tau) \delta^2 \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1(2\mu_1 + \lambda_1)} (e\tau \cdot \tau)(\tau \otimes \tau) + o(\delta^2),$$

où e est le tenseur des déformations, les c_i sont des constantes explicites indépendantes de δ et $\kappa(\nu, \tau)$ est une constante dépendant de la direction des fibres τ et d'une mesure de Radon ν (précisément, ν est la H -mesure associée à la fonction caractéristique de la microstructure périodique considérée). Ainsi, ce modèle permet d'obtenir un tenseur effectif simple qui valide rigoureusement, au second ordre, le modèle de biomécanique considéré par Peskin.

1.2 Homogénéisation à fort contraste

En homogénéisation à fort contraste, j'ai considéré le problème de double porosité dans le cas où le milieu extérieur est faiblement conducteur. De façon plus explicite, il s'agit du cas de fibres de conduction 1 dans un milieu de conduction ε^2 à l'échelle microscopique ε . J'ai d'abord proposé, dans le cas périodique, une nouvelle approche par fonctions tests (l'approche classique consiste à utiliser la convergence à double échelle, voir par exemple [1], [4]) qui s'étend simplement aux cas des microstructures fibrées non périodiques. j'ai ainsi pu obtenir le problème de double porosité homogénéisé pour le modèle I par couches. La méthode utilisée consiste à construire une fonction test pour toute la microstructure par recollement des fonctions tests associées aux microstructures périodiques des couches. Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^3 . Notons χ_ε^I la fonction caractéristique de la distribution non périodique de fibres du modèle I et u_ε la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\text{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad \text{où} \quad A_\varepsilon := (\chi_\varepsilon^I + \varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^I)) I_3. \quad (3)$$

J'ai montré que le couple $((1 - \chi_\varepsilon^I)u_\varepsilon, \chi_\varepsilon^I u_\varepsilon)$ converge alors $L^2(\Omega)^2$ faible vers le couple $((1 - \theta)u, \theta v)$ où (u, v) est la solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\text{div}((\tau \otimes \tau) \nabla v) + \gamma(v - u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \theta(u - v) = \gamma^{-1} f & \text{dans } \Omega \\ v(\tau \cdot \vec{\nu}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

où θ est le volume des fibres, τ est la direction des fibres, $\vec{\nu}$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ et γ une constante explicite indépendante de la direction des fibres. Le problème non

local (4) est une extension de celui obtenu par Bellieud et Bouchitté [4] qui ont considéré une microstructure périodique de fibres d'orientation constante.

Pour le cas du modèle *II* par rangées, cette méthode n'est plus valable à cause de l'absence d'une échelle intermédiaire qui ne permet plus d'obtenir une fonction test adéquate par recollement des fonctions test de chaque rangée. Ce problème fait l'objet d'un travail en cours (voir la section Projets de Recherche).

2 Résultats de dualité et de compacité en homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste en conduction [P2] et en élasticité incompressible [P4]

Récemment, Briane [9] et Briane et Casado-Díaz [11], [12] ont obtenu des extensions de la théorie de la H -convergence de Murat-Tartar [22] pour des suites de conductivités non bornées dans L^∞ . En particulier, ils ont obtenus dans [11] un résultat de compacité de type " H -convergence" pour des suites de conductivités symétriques bornées dans L^1 mais non dans L^∞ .

Dans ce travail en collaboration avec Briane, nous avons obtenu des extensions des relations de dualité de Keller-Dykhne [15], [18] au cadre de la " H -convergence" généralisée de Briane et Casado-Díaz. Ces relations (voir aussi [20], ainsi que [16] pour une approche plus générale) établissent que, en dimension 2, pour toute suite A_ε de fonctions à valeurs matricielles équi-coercive et uniformément bornée, on a

$$A_\varepsilon \xrightarrow{H} A_* \implies \frac{A_\varepsilon^T}{\det A_\varepsilon} \xrightarrow{H} \frac{A_*^T}{\det A_*}, \quad (5)$$

où A_ε^T est la matrice transposée de A_ε et la notation \xrightarrow{H} désigne la H -convergence à une sous-suite près.

Dans une première partie, nous avons obtenu un raffinement du résultat de compacité de Briane et Casado-Díaz pour des conductivités non nécessairement symétriques. Ensuite, nous avons étendu la relation de dualité (5) au cas de conductivités bidimensionnelles fortement contrastées. Plus précisément, considérons une suite A_ε de conductivités (non nécessairement symétriques) équi-coercive mais non uniformément bornée contrairement au cas classique. On note A_ε^s la partie symétrique de A_ε . Alors, sous l'hypothèse principale

$$\frac{\det A_\varepsilon}{\det A_\varepsilon^s} |A_\varepsilon^s| \text{ converge faible* au sens des mesures de Radon vers } a \in L^\infty, \quad (6)$$

nous avons montré que A_ε " H -converge" vers une fonction à valeur matricielle A_* et que l'implication (5) reste vraie dans le cadre de cette extension de la H -convergence. Ces relations de dualité ont permis d'obtenir un résultat de compacité pour le cas dual d'une suite de conductivités uniformément bornée mais non équi-coercive sous une condition analogue à (6) pour A_ε^{-1} . De plus, dans le cas périodique, nous avons montré que la condition (6) peut être améliorée. Explicitement, celle ci peut être remplacée par

$$\varepsilon^2 \int_Y \frac{\det A_\varepsilon^\sharp}{\det(A_\varepsilon^\sharp)^s} |(A_\varepsilon^\sharp)^s| dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (7)$$

quand on a $A_\varepsilon(x) := A_\varepsilon^\sharp(\frac{x}{\varepsilon})$ où A_ε^\sharp est une suite de fonctions matricielles Y -périodique (avec $Y :=]0, 1]^2$ pour fixer les idées).

Dans le cas de l'élasticité linéarisée bidimensionnelle, Briane et Camar-Eddine [10] ont obtenus des extensions des résultats de Briane et Casado-Díaz. La généralisation des

relations de dualité à ce cas pose un problème supplémentaire puisqu'il n'existe pas, dans le cadre général de la H -convergence, de relation de dualité équivalente à la relation de Keller-Dykhne de la conduction. Néanmoins, en élasticité incompressible, Francfort et Suquet [17] ont obtenu, toujours en dimension 2, une relation de dualité dans le cadre de la H -convergence (cas linéaire et non linéaire). Dans [P4], j'ai obtenu, en élasticité linéaire incompressible, un résultat de compacité et une extension de la relation de dualité de Francfort-Suquet dans le cadre de l'homogénéisation bidimensionnelle à fort contraste de façon analogue au cas de la conduction.

3 Homogénéisation de l'effet Hall bidimensionnel [P3]

En électrophysique (cf. [19]), des charges en mouvement dans un conducteur perpendiculaire à un champ magnétique h induisent une force équilibrée par un champ électrique transverse : c'est l'effet Hall. En dimension deux, pour un conducteur de résistivité (inverse de la conductivité σ) symétrique $\rho := \sigma^{-1}$, l'effet Hall se traduit par une résistivité perturbée non symétrique $\rho(h)$ qui, pour un champ h faible, s'écrit

$$\rho(h) = \rho + rhJ + o(h), \quad (8)$$

où r est le coefficient de Hall et J est la matrice de rotation de 90° . Considérons maintenant un matériau fortement hétérogène de résistivité $\rho^\varepsilon := (\sigma^\varepsilon)^{-1}$, où ε est un petit paramètre représentant l'échelle de la microstructure. D'après le développement au premier ordre (8), un faible champ magnétique h induit une résistivité perturbée $\rho^\varepsilon(h)$ vérifiant

$$\rho^\varepsilon(h) = \rho^\varepsilon + r_\varepsilon hJ + o(h), \quad (9)$$

pour un coefficient de Hall hétérogène r_ε . Le problème posé consistait à calculer le coefficient de Hall effectif r_* obtenu par homogénéisation de la microstructure lorsque ε tend vers 0.

En collaboration avec Briane et Milton [P3], nous avons étendu un résultat de Bergman [5] du cas périodique au cas général de la H -convergence de Murat-Tartar [22] sans hypothèse de périodicité. En notant σ^* la H -limite de la suite σ^ε et P^ε un correcteur associé à σ^ε (la matrice P^ε est en particulier telle que la conductivité homogénéisée σ^* est la limite L^2 faible de $P^\varepsilon \sigma^\varepsilon$), nous avons montré que la résistivité effective est donnée par

$$\rho^*(h) := (\sigma^*(h))^{-1} = (\sigma^*)^{-1} + r_* hJ + o(h),$$

où la fonction r_* (le coefficient de Hall effectif) vérifie

$$\det(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon) r_\varepsilon \rightharpoonup \det(\sigma^*) r_* \quad \text{au sens des distributions.} \quad (10)$$

À partir de cette formule, nous avons pu obtenir la propriété de positivité suivante

$$r_1 \leq r_\varepsilon \leq r_2 \text{ p.p. dans } \Omega \implies r_1 \leq r_* \leq r_2 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

quand r_1, r_2 sont deux fonctions continues données. Briane et Milton [13] ont montré que ce résultat de positivité est faux en dimension trois. Par ailleurs, dans le cas d'un matériau à deux phases isotropes, Milton [21] a obtenu une formule explicite pour r_* valable pour un champ h quelconque. Dans [P3], nous avons étendue cette formule au cas de composites anisotropes à deux phases interchangeables (voir Figure 2 pour un exemple de composite périodique à deux phases interchangeables).

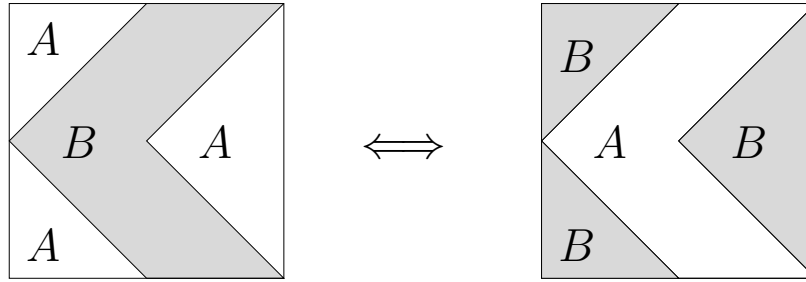


FIG. 2 – Deux périodes d’un matériau à deux phases avec une structure en chevrons

PROJETS DE RECHERCHE

Homogénéisation à fort contraste d’un matériau fibré non périodique

Durant ma thèse j’ai étudié l’homogénéisation de deux matériaux fibrés non périodiques résultant de la modélisation des fibres cardiaques (voir Travaux de recherche). Dans le cas du matériau localement périodique constitué de couches de fibres périodiques (modèle *I*), j’ai obtenu le problème effectif dans un cadre de fort contraste où les fibres sont de conductivité 1 et le milieu extérieur de conductivité ε^2 , ε étant la taille des hétérogénéités. La technique employée consiste à construire une fonction test du matériau non périodique par recollement des fonctions test de chaque couche de fibres périodiques. Cela est rendu possible en raison de l’existence d’une échelle intermédiaire.

Le problème qui se pose désormais serait d’obtenir un résultat semblable pour le matériau constitué de rangées de fibres périodiques (modèle *II*). Dans ce cas, la technique employée pour le modèle *I* n’est plus adaptée à cause de l’absence d’une échelle intermédiaire. L’approche envisagée consiste à reprendre la méthode développée par Briane [8] dans le cadre de la *H*-convergence. Celle-ci consiste à approcher le modèle non périodique *II* par un matériau localement périodique. Ce matériau localement périodique est constitué de fibres distribuées périodiquement dans des couches comme dans le cas du modèle *I*. Mais, contrairement au modèle *I*, dans chaque couche le matériau périodique a une cellule de périodicité qui dépend de la couche considérée. Ce matériau approchant le modèle *II* peut être vu comme un matériau tangent à cette microstructure.

Dans ce cadre, mon projet s’articule autour de trois étapes :

1. Tout d’abord déterminer le problème effectif correspondant au cas du matériau tangent. Celui-ci devrait pouvoir s’obtenir en adaptant la méthode employée pour le modèle *I* avec la difficulté supplémentaire que la cellule de périodicité varie suivant la couche considérée.
2. Ensuite, il faudrait pouvoir justifier que le problème effectif du matériau tangent est bien une approximation du problème effectif du modèle *II*. Dans le cadre de la *H*-convergence, c’est une conséquence de résultats d’estimations L^1 sur les *H*-limites (voir par exemple [6]). Dans le cadre du fort contraste, il n’y a pas de résultats généraux correspondants, néanmoins cela devrait être réalisable en raison de la microstructure particulière étudiée (fibres).

3. Enfin, d'autres travaux sont envisagés pour l'homogénéisation à fort contraste des deux modèles non périodiques (*I* et *II*) dans le cadre de l'élasticité linéarisée.

De plus, on peut remarquer que, pour ce modèle *II*, l'approche par un matériau localement périodique dont la périodicité varie suivant les couches devrait induire dans le problème effectif des effets non locaux dépendant du point considéré, ce qui serait un apport intéressant par rapport au cas du modèle *I*.

Asymptotiques petit volume dans un problème de Stokes avec tension de surface

Ce travail est une collaboration avec Eric Bonnetier, Emmanuel Maitre et Faouzi Triki du laboratoire Jean Kuntzmann (LJK) de l'Université Joseph Fourier Grenoble. Celui-ci a débuté à mon arrivée au LJK en septembre 2008. Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation de gouttelettes qui peuvent être vues comme une membrane contenant un fluide, immergé dans un fluide homogène. Notre approche consiste à considérer la présence de ce fluide muni d'une membrane comme une perturbation du fluide initial par une inclusion de faible volume et à étudier le comportement asymptotique du champ de déplacement résultant, lorsque le volume de l'inclusion tend vers zéro. De nombreux travaux concernent les asymptotiques des champs pour des perturbations de petit volume dans le cadre, par exemple, de problèmes de conduction, d'élasticité, de Maxwell ou d'Helmholtz (voir par exemple [2] et [14] ainsi que les références qui s'y trouvent).

On suppose les deux fluides régis par le système de Stokes incompressible, avec une condition au bord de Dirichlet. Le fluide contenant l'inclusion est représenté par un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et l'inclusion est un ouvert ω_ε inclus dans Ω , éloigné du bord $\partial\Omega$. L'ouvert ω_ε vérifie $|\omega_\varepsilon| = o(\varepsilon^n)$ où ε est un petit paramètre. On note μ_0 la viscosité du fluide en dehors de l'inclusion et μ_1 la viscosité dans l'inclusion. En l'absence d'inclusion, le champ de déplacement u vérifie un système de Stokes incompressible de viscosité μ_0 . En présence de l'inclusion, le champ de déplacement u_ε vérifie le système de Stokes incompressible avec une viscosité μ_0 en dehors de l'inclusion et une viscosité μ_1 dans l'inclusion. De plus, la membrane de l'inclusion soumise aux fluides intérieur et extérieur à l'inclusion induit une tension de surface F_ε sur le bord de l'inclusion $\partial\omega_\varepsilon$.

Dans ce travail, notre étude consiste alors à :

1. Déterminer le développement asymptotique dans la limite de faible volume $\varepsilon \rightarrow 0$ de la différence $u_\varepsilon - u$. En particulier, on cherche à obtenir le premier terme du développement asymptotique (terme d'ordre ε^n). Celui-ci devrait s'écrire en fonction d'un tenseur de polarisation qui dépend de la forme de l'inclusion, du contraste des viscosités μ_0 et μ_1 ainsi que de la tension de surface F_ε remise à l'échelle $\varepsilon = 1$.
2. Étudier la dépendance de ce tenseur de polarisation par rapport à la tension de surface. La principale difficulté de ce travail réside dans la présence de ce terme de tension de surface F_ε qui dépend de la courbure moyenne de $\partial\omega_\varepsilon$. Dans le cas d'absence de tension de surface, le problème a été traité dans [3].
3. Modéliser un système instationnaire à l'aide de ces asymptotiques.
4. Établir un système simplifié couplant une EDP pour le fluide extérieur et des EDO pour les inclusions (EDO permettant de déterminer le tenseur de polarisation).
5. Considérer le cas où les fluides sont régis par les équations de Navier-Stokes (en considérant tout d'abord la question de la modélisation de vésicules puis celle de globules rouges).

RÉFÉRENCES

- [1] G. ALLAIRE, “Homogenization And two-scale convergence.” *SIAM J. Math. Anal.* **23**, pp. 1482-1518 (1992).
- [2] H. AMMARI & H. KANG, *Polarization and moment tensors : with applications to inverse problems and effective medium theory*. Applied Mathematical Sciences Series, Vol. 162, Springer-Verlag, New York (2007).
- [3] H. AMMARI, P. GARAPON, H. KANG, H. LEE, “A Method of biological tissues elasticity reconstruction using magnetic resonance elastography measurements”, *Quar. Appl. Math.*, **66**, pp. 139-175 (2008).
- [4] M. BELLIEUD & G. BOUCHITTÉ, “Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects”, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. IV*, **26** (3), pp. 407-436 (1998).
- [5] D.J. BERGMAN, “Self-duality and the low field Hall effect in 2D and 3D metal-insulator composite”, *Percolation structures and Processes*, G. Deutscher, R. Zallen and J. Adler ed., Jerusalem : Israel Physical Society, pp. 297-321 (1983).
- [6] L. BOCCARDO & F. MURAT, “Homogénéisation de problèmes quasilinéaires”, *Atti del Convegno Studio di Problemi limite della Analisi Funzionale” Bressanone 7-9 sett. 1981*, Pitagora Editrice, Bologna, pp. 13-51 (1982).
- [7] M. BRIANE, *Homogénéisation de matériaux fibrés et multi-couches*. Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie Paris VI(1990).
- [8] M. BRIANE, “Three models of non periodic fibrous materials obtained by homogenization”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **27**(6), pp. 759-775 (1993).
- [9] M. BRIANE, “Nonlocal effects in two-dimensional conductivity”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **182** (2), pp. 255-267 (2006).
- [10] M. BRIANE & M. CAMAR-EDDINE, “Homogenization of two-dimensional elasticity problems with very stiff coefficients”, *J. Math. Pures Appl.*, **88** pp. 483-505 (2007).
- [11] M. BRIANE & J. CASADO-DÍAZ, “Two-dimensional div-curl results. Application to the lack of nonlocal effects in homogenization”, *Com. Part. Diff. Equ.*, **32**, no. 4-6, pp. 935-969 (2007).
- [12] M. BRIANE & J. CASADO-DÍAZ, “Asymptotic behaviour of equicoercive diffusion energies in dimension two”, *Cal. Var. PDE’s*, **29** (4), pp. 455-479 (2007).
- [13] M. BRIANE & G.W. MILTON, “Homogenization of the three-dimensional Hall effect and change of sign of the Hall coefficient”, à paraître dans *Arch. Rat. Mech. Anal*, disponible en ligne sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00130591>.
- [14] Y. CAPDEBOSCQ & M.S. VOGELIUS, “Imagerie Électromagnétique de petites inhomogénéités”, *ESAIM : Proceedings*, Vol. 22, pp. 40-51 (2007).
- [15] A.M. DYKHNE, “Conductivity of a two-dimensional two-phase system”, *A. Nauk. SSSR*, **59** (1970), pp. 110-115. [Engl. trad. : *Sov. Phys.-JETP* **32**, pp. 63-65 (1971)].
- [16] G. FRANCFORT & F. MURAT, “Optimal bounds for conduction in two-dimensional, two-phase, anisotropic media”, *Non-classical continuum Mechanics*, Proceedings of the London Mathematical Society, Symposium, Durham, July 1986, R. J. Knops & A. A. Lacey ed., Cambridge University Press, pp. 197-212 (1987).
- [17] G. FRANCFORT & P. SUQUET, “Duality relations for nonlinear incompressible two-dimensional elasticity”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **131** A, pp. 351-369 (2001).

- [18] J.B. KELLER, “A theorem on the conductivity of a composite medium”, *J. Mathematical Phys.*, **5** (4), pp. 548-549 (1964).
- [19] L. LANDAU & E. LIFCHITZ, *Électrodynamique des milieux continus*. Éditions Mir, Moscou (1969).
- [20] K.S. MENDELSON, “A theorem on the effective conductivity of a two-dimensional heterogeneous medium”, *J. of Applied Physics*, **46** (11), pp. 4740-4741 (1975).
- [21] G.W. MILTON, “Classical Hall effect in two-dimensional composites : A characterization of the set of realizable effective conductivity tensors”, *Physical Review B (Solid State)* 38(16), pp. 11296-11303 (1988).
- [22] F. MURAT & L. TARTAR, “ H -convergence”, *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, A.V. Cherkaev and R.V. Kohn ed., Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston 1998, pp. 21-43.
- [23] C.S. PESKIN, “Fiber architecture of the left ventricular wall : an asymptotic analysis”, *Commun. Pure Appl. Math.* **42**, No.1, pp. 79-113 (1989).
- [24] L. TARTAR, “ H -measures and small amplitude homogenization”, *Random Media et Composites*, R.V. Kohn and G.W. Milton ed., SIAM, Philadelphia, pp. 89-99 (1989).
- [25] L. TARTAR, “ H -measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations”, *Proc. Royal Soc. Ed.*, **115**-A, pp. 193-230 (1990).