Éléments de correction - **Méthodes numériques**

Puissances

Exercice n° 1

$$\frac{8^2 \times 5^3 \times 7^2}{5^4 \times 7^3 \times 2^7 \times 9} = \frac{2^6 \times 5^3 \times 7^2}{5^4 \times 7^3 \times 2^7 \times 9} = \frac{1}{5 \times 7 \times 2 \times 9}, \quad \frac{6^2 \times 5^7 \times 27^2}{21^3 \times 9^2 \times 5^{10}} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5^7 \times 3^6}{3^3 \times 7^3 \times 3^4 \times 5^{10}} = \frac{2^2 \times 3^{11} \times 5^7}{3^7 \times 5^{10} \times 7^3} =$$

et

$$\begin{aligned} \frac{(0,07)^2 \times (12,4)^3 \times 5^3}{5^3 \times 7^2 \times 8^2} &= \frac{7^2 \times 124^3 \times 5^3}{5^3 \times 7^2 \times 8^2 \times 10^4 \times 10^3} = \frac{7^2 \times 2^6 \times 31^3 \times 5^3}{5^3 \times 7^2 \times 2^6 \times 5^4 \times 2^4 \times 5^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 31^3}{2^{13} \times 5^{10} \times 7^2} = \frac{31^3}{2^7 \times 5^7} \end{aligned}$$

Exercice n° 2

$$\frac{2^{1996}}{2} = 2^{1996-1} = 2^{1995}.$$

Exercice n° 3

$$\frac{(-a)^7 (b^2 c^3)^4}{-b^3 c (-a)^5} = \frac{-a^7 b^8 c^{12}}{b^3 c a^5} = -a^2 b^5 c^{11}.$$

Exercice n° 4

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et

$$(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

et

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Écriture décimale

Exercice n° 6

$$\frac{0,000273}{0,003} = \frac{273 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} = \frac{273}{3}\ 10^{-3} = 91 \times 10^{-3},$$

$$\frac{3}{25} \times 10^4 = \frac{300}{25} \times 10^2 = 12 \times 10^2 = 1200,$$

$$\begin{aligned} \frac{1,495}{0,125} \times 10^{-3} &= \frac{1495}{125} \times 10^{-3} = \frac{1500-5}{125} \times 10^{-3} = \left(12 - \frac{5}{125}\right) \times 10^{-3} = \left(12 - \frac{500}{125} \times 10^{-2}\right) \times 10^{-3} \\ &= \left(12 - 4 \times 10^{-2}\right) \times 10^{-3} = 11,96 \times 10^{-3} = 1196 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Exercice n° 7

1500 milliards de secondes= 1500×10^9 secondes. En considérant qu'un an vaut environ 365 jours, on obtient qu'un an vaut environ $60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31536 \times 10^3$ secondes. Alors, 1500 milliards de secondes équivaut à

$$\frac{1500 \times 10^9}{31536 \times 10^3} = \frac{150000}{31536} \times 10^4 \approx 4,2 \times 10^4 \quad \text{secondes.}$$

Soit environ 42000 ans. La bonne réponse est donc la D).

Exercice n° 8
Le plus petit nombre obtenu est 128036 alors que le plus grand est 948036. La bonne réponse est donc la C).

Exercice n° 9
Il entend 247 PIM, 24 PAM et 2 POUM, d'où $247 + 24 + 2 = 273$ bruits.

Exercice n° 11
Puisque $7 \times 4 = 28$, on a $z = 8$. De plus, $y = 0$ d'où $t = y + z = 8$. On obtient $x + y + z + t = x + 16$. D'après les réponses proposées, puisque $x \neq 0$, on a $x+y+z+t = 19$ ou $x+y+z+t = 32$, soit $x = 3$ ou $x = 16$ or x est un chiffre donc $x = 3$, d'où $x + y + z + t = 19$.

Exercice n° 12
Puisque $6 \times 8 = 48$, on a $b = 8$. De plus, $c = 0 =$ et $d = c + b = 8$. Le chiffre des unité de $6a$ vaut 2, d'où $a = 2$ ou $a = 7$. Seul $a = 7$ donne la bonne multiplication donc $a + b + c + d = 7 + 8 + 8 = 23$ qui est un nombre premier.

Exercice n° 13

a) $\dfrac{12}{37} + \dfrac{10}{42} = \dfrac{12}{37} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{12 \times 21 + 5 \times 37}{37 \times 21} = \dfrac{252 + 185}{777} = \dfrac{437}{777}$.

b) $\dfrac{44}{20} + 27 = \dfrac{11}{5} + 27 = \dfrac{11 + 5 \times 27}{5} = \dfrac{11 + 135}{5} = \dfrac{146}{5}$.

c) $\dfrac{38}{12} + \dfrac{5}{26} = \dfrac{19}{4} + \dfrac{5}{26} = \dfrac{19 \times 26 + 5 \times 4}{4 \times 26} = \dfrac{494 + 20}{104} = \dfrac{516}{104} = \dfrac{129}{26}$.

d) $\dfrac{19}{8} + \dfrac{12}{18} = \dfrac{19}{8} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{19 \times 3 + 2 \times 8}{3 \times 8} = \dfrac{57 + 16}{24} = \dfrac{73}{24}$.

e) $\dfrac{8}{46} + \dfrac{8}{16} = \dfrac{4}{23} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4 \times 2 + 23}{2 \times 23} = \dfrac{31}{46}$.

Exercice n° 14
On a

$$7 - \frac{2-a}{2} = 7 - \frac{2}{2} + \frac{a}{2} = 7 - 1 + \frac{a}{2} = 6 + \frac{a}{2}.$$

Exercice n° 15

$$d = 0,333 = \frac{0,333 \times 301}{301} = \frac{99,9 + 0,333}{301} = \frac{100,233}{301} > b, \quad d = 0,333 < 0,333\cdots = \frac{1}{3} = a,$$

d'où $b < d < a$. De plus, on a

$$e = 0,334 > 0,333\cdots = a, \quad \text{et} \quad e = 0,334 = \frac{0,334 \times 901}{901} = \frac{300,934}{901} < c.$$

Finalement, $b < d < a < e < c$.

Exercice n° 16
Les fractions comprises strictement entre $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{4}{5}$ de dénominateur strictement plus petit que 9 sont

$$\frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}.$$

Celles-ci sont donc au nombre de 11.

Exercice n° 17
Puisque $0 < b < 1$, on a

$$-1 < -b < 0, \quad \text{d'où} \quad -6 = -5 - 1 < a - b < -3.$$

De plus, on

$$9 < a^2 < 25, \quad -1 < -b^2 < 0, \quad \text{d'où} \quad 8 = 9 - 1 < (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 < 25.$$

Exercice n° 18

$$\begin{aligned} 3 \times (3 \times (3 \times (3+1)+1)+1)+1 &= 3 \times (3 \times (3 \times 4 + 1) + 1) + 1 = 3 \times (3 \times 13 + 1) + 1 \\ &= 3 \times 40 + 1 = 120 + 1 = 121. \end{aligned}$$

Exercice n° 19

$$\frac{12}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3-2}{6} = \frac{12}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{24+1}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Exercice n° 20

$$x = \frac{3 \times \frac{1}{5}}{4} + \frac{1}{\frac{3}{4+5}} = \frac{\frac{3}{5}}{4} + \frac{1}{\frac{3}{9}} = \frac{3}{20} + \frac{9}{3} = 0,15 + 3 = 3,15.$$

Exercice n° 21

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180} &= 3\sqrt{4 \times 5} + 4\sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{16 \times 5} - \sqrt{9 \times 4 \times 5} \\ &= 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 4\sqrt{9} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\ &= 3 \times 2 \times \sqrt{5} + 4 \times 3 \times \sqrt{5} - 2 \times 4 \times \sqrt{5} - 3 \times 2 \times \sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - \frac{5}{3}\sqrt{63} &= 9\sqrt{7} - 2\sqrt{4 \times 7} - \frac{5}{3}\sqrt{9 \times 7} \\ &= 9\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 5\sqrt{7} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(3-2) = \sqrt{2}.$$

Exercice n° 22

$$\left(\sqrt{24}+\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{6}(\sqrt{4}+1)\right)^2 = 6(2+1)^2 = 6 \times 9 = \begin{cases} 3^2\sqrt{36}, \\ 54. \end{cases}$$

En utilisant $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\left(\sqrt{24}+\sqrt{6}\right)^2 = 24 + 2\sqrt{24}\sqrt{6} + 6 = 30 + 2\sqrt{24 \times 6} = 30 + 2\sqrt{144}.$$

Exercice n° 23
55 millions$= 55 \times 10^6$ donc 0.5% de 55 millions de personnes donne $55 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-2} = 27.5 \times 10^4$, soit 27 500 personnes.

Exercice n° 24
Soit x le prix du billet acheté à un guichet. Alors $120 \times 10^{-2}x = 225$ francs, d'où $x = \frac{225}{120} \times 10^2 = 1.875 \times 10^2 = 187.50$ francs.

Exercice n° 25
On a $100 - 62 - 15 = 100 - 77 = 23\%$ d'élèves demi-pensionnaires.

Exercice n° 26
Soit x le prix de vente de l'objet. Alors on a $x - 1116 = \frac{10}{100}\ x$, d'où $\frac{90}{100}\ x = 1116$ et ainsi $x = \frac{100}{90}\ 1116 = 10 \times 124 = 1240$ francs.

Exercice n° 27
Soit x le montant HT du devis. Alors on a $6813,9 = \frac{120,6}{100}\ x$ donc $x = \frac{100}{120,6} \times 6813,9$ francs. Le devis en automne 1999 est donc de $\frac{105,5}{100}\ x = \frac{105,5}{100} \times \frac{100}{120,6} \times 6813,9 = 6813,9 \times \frac{105,5}{120,6} = 5960,75$ francs.

Exercice n° 28
Soit p le poids de la pastèque après déssèchement. La quantité d'eau après déssèchement est alors de $\frac{98}{100}\ p$. La quantité d'eau partie après déssèchement est donc de $\frac{99}{100} \times 2500 - \frac{98}{100}\ p = 2475 - \frac{98}{100}\ p$. Ainsi, le poids après déssèchement est de $2500 - \left(2475 - \frac{98}{100}\ p\right)$ donc $p = 25 + \frac{98}{100}\ p$, d'où $\frac{2}{100}\ p = 25$. Ce qui entraîne $p = 25 \times 50 = 1250$ g.

Exercice n° 29
Pour une quantité de viande x, il y a une quantité $x - \frac{1}{5}\ x - \frac{1}{6}\ x = \frac{30-6-5}{30}\ x = \frac{19}{30}\ x$ kg de viande désossée et dégraissée. Soit q la quantité de viande brute nécessaire pour obtenir un rôti de 1kg de viande désossée et dégraissée. Alors, on a $\frac{19}{30}\ q = 1$, d'où $q = \frac{30}{19} \approx 1.57$ kg.

Exercice n° 30
L'encodage en 192 kb/s est 50% plus encombrant donc $\frac{150}{100}$ fois plus encombrant donc son taux de compression relativement au codage d'un cédérom est $\frac{150}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{15}{100}$.

Exercice n° 31
Soit x le prix d'un fer à repasser chez les concurrents de Z. Alors Z vend ses fers à repasser $\frac{110}{100}\ x$. Les mathématiciens ayant une remise de 10%, ceux-ci achètent leur fer chez Z à $\frac{90}{100} \times \frac{110}{100}\ x = \frac{99}{100}\ x < x$. Donc les mathématiciens payent leur fer moins cher chez Z que chez les concurrents.

Exercice n° 32
Soit x le salaire mensuel de Gérard au 1er janvier 2004. Alors on a

$$\frac{90}{100}\left(\frac{110}{100}(x+200) - 200\right) = x,$$

ce qui entraîne

$$\left(\frac{110}{100} - \frac{100}{90}\right) x = 200 - \frac{110}{100} \times 200 = -20 \Rightarrow -90x = -20 \Rightarrow x = 1800.$$

Exercice n° 33
La voiture qui double va à une vitesse de $100 + x$ km/h, où x est la vitesse nécessaire pour parcourir 150 m en 10 secondes. On a $x = \frac{6 \times 60 \times 150}{1000} = \frac{36 \times 15}{10} = 18 \times 3 = 54$ km/h. Donc la voiture roule à 154 km/h.

Exercice n° 34
On note $d_c(t)$ la distance parcourue, en km, par le cycliste en t heures et $d_p(t)$ celle parcourue par le piéton en t heures. Alors, on a $d_c(t) = 20t$ et $d_p(t) = 5t$. Soit t_0 le nombre d'heures écoulée lorsque le cycliste et le piéton se rencontrent. Alors $d_c(t_0) + d_p(t_0)$ = distance entre les deux villes, soit 35 km d'où $20t_0 + 5t_0 = 35$. Donc $t_0 = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$ et $d_c(t_0) = 20 \times \frac{7}{5} = 4 \times 7$.

Exercice n° 35
Soit x le vitesse de la voiture sur les 120 derniers km. Le trajet est de $200 + 200 + 120 = 520$ km, à la vitesse de 130 km/h il faut $\frac{520}{130} = 4$ h pour le parcourir. Les 200 premiers kilomètres sont parcourus en $\frac{200}{120} = \frac{5}{3}$ heures, les 200 suivants en $\frac{200}{150} = \frac{4}{3}$ heures et les 120 derniers en $\frac{120}{x}$ heures. Ainsi on doit avoir $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} + \frac{120}{x} = 4$, ce qui entraîne $\frac{120}{x} = 1$, d'où $x = 120$ km/h.

Exercice n° 36
Soient x la longueur, en km, du trajet, v la vitesse, en km/h, du train et t le temps, en heures, qu'il faut au train pour parcourir le trajet x à la vitesse v. Alors $x = t \times v$. On a $x = (t-1) \times (v+30)$ et $x = (t+2) \times (v-30)$, ce qui donne le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x = t \times v \\ x = x + 30t - v - 30 \\ x = x - 30t + 2v - 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \times v \\ v = 30t - 30 \\ 2v = 30t + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \times v \\ v = 90 \\ 30t = v + 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \times v \\ v = 90 \\ t = \dfrac{120}{30} = 4, \end{cases}$$

d'où $x = 4 \times 90 = 360$ km.

Exercice n° 37
L'automobiliste R roule à une vitesse moyenne de $\frac{80}{2} + \frac{100}{2} = 40 + 50 = 90$ km/h.
L'automobiliste S roule à une vitesse moyenne de $\frac{80}{2} + \frac{100}{2} = 40 + 50 = 90$ km/h.

Exercice n° 39
Soient r le prix du vin rouge et b le prix du vin blanc. Alors, on a

$$\begin{cases} 4r + 7b = 238 \quad (1), \\ 7r + 4b = 235 \quad (2). \end{cases}$$

En faisant $(2) - (1)$ on obtient $3r - 3b = -3$, d'où $r = b - 3$. En remplaçant r par $b - 3$ dans (1) on obtient $11b = 250$. Donc $b = \frac{250}{11} \approx 22,72$ et $r = b - 3 = \frac{250 - 33}{11} = \frac{217}{11} \approx 19,72$.

Exercice n° 40
Soient x le nombre de convives et y le nombre de parts initiales. Le convive qui mange le plus a eu $1 + (y - x) = 7$ parts. De plus, si le nombre de parts est de $y + 6$ alors chaque convive a deux parts d'où $y + 6 = 2x$, ainsi $y = 2x - 6$. En remplaçant dans la première égalité, on obtient $1 + (2x - 6 - x) = 7$. D'où $x = 7 - 1 + 6 = 12$ convives.

Exercice n° 41
On cherche $x \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{2+x}{9+x} = 2\ \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. Alors on a $9 \times (2 + x) = 4 \times (9 + x)$, d'où $(9 - 4)x = 4 \times 9 - 9 \times 2 = 36 - 18 = 18$, ainsi $x = \frac{18}{5}$.

Exercice n° 42
Soit x la surface initiale d'un nénuphar. Puisque cette surface double chaque jour, au bout de n jours le nénuphar a une surface de $2^n\ x$. La surface du lac est donc $2^{15}x$. Soit t le temps qu'il faut a deux nénuphars pour recouvrir ce lac. Alors, on a $2^t x + 2^t x = 2^{15}x$ donc $2^{t+1}x = 2^{15}x$, d'où $t + 1 = 15$, *i.e.* $t = 14$ jours.