Éléments de correction - **Géométrie 1**

Angles

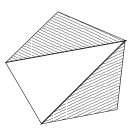
Exercice n° 2
Le troisième angle du triangle est $180 - x$°et la somme des angles du triangle vaut 180°, d'où $180 - x + 90 + 36 = 180$ donc $x = 126$.

Exercice n° 3
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux et valent $180 - 110 = 70$°donc $\widehat{CAB} = 180 - \widehat{ABC} - \widehat{BCA} = 180 - 140 = 40$°.

Exercice n° 4
Un triangle isocèle ABC a deux angles égaux donc on a $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$, ou $\widehat{ABC} = \widehat{CAB}$ ou $\widehat{BCA}\widehat{CAB}$. Si $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$, alors $\widehat{ABC} = 50$°. Si $\widehat{ABC} = \widehat{CAB}$ alors $2\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BCA} = 180 - 50 = 130$°et donc $\widehat{ABC} = 65$°. Si $\widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 50$ alors $\widehat{ABC} = 180 - 2 \times 50 = 80$°.

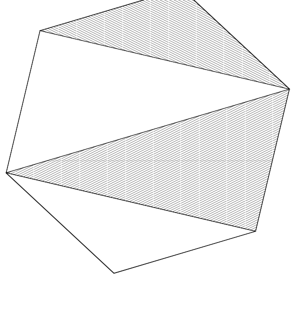
Exercice n° 5
Le triangle ABC est isocèle et $\widehat{BAC} = 156$°donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(180 - 156) = 12$°. Comme $BC = CD$, $\widehat{CDB} = \widehat{DBC} = 180 - \widehat{ABC} = 24$°d'où $\widehat{BCD} = 180 - 2 \times 24 = 132$°. Alors $\widehat{DCE} = 180 - \widehat{DCB} - \widehat{BCA} = 180 - 132 - 12 = 36$°. Enfin, puisque $CD = DE$, $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = 36$°et alors $\widehat{DEF} = 180 - \widehat{DEC} = 180 - 36 = 144$°.

Exercice n° 6

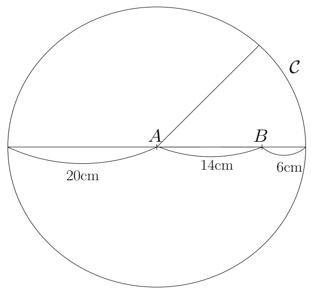


Le pentagone régulier peut être décomposé en trois triangles dont la somme totale des angles est égale à la somme des angles du pentagone donc la somme des angles d'un pentagone est $3 \times 180 = 540$. Chaque angle du pentagone étant égaux, ceux-ci mesurent $\dfrac{540}{5} = 108$°.

Exercice n° 7
Un polygône convexe à n cotés peut être décomposé en $n - 2$ triangles dont la somme totale des angles est égale à la somme des angles du polygône (penser à un carré, au pentagone de l'exercice précédent ou à l'hexagone ci-dessous). Donc la somme de ses angles est $(n - 2) \times 180$°.

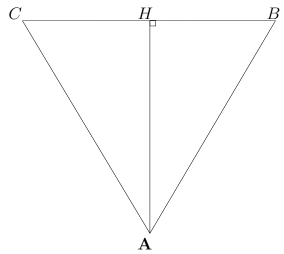


Exercice n° 8



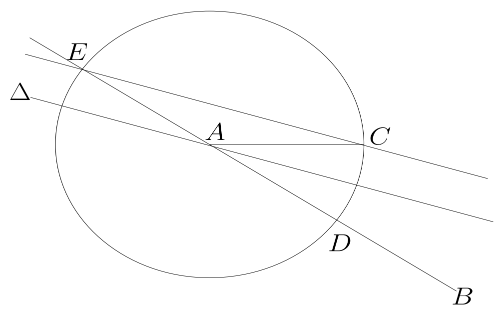
Si l'on trace le segment $[AB]$ alors le point C appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $AC = 20$ cm mais C n'appartient pas à la droite (AB) donc on a $6 < BC < 34$ cm.

Exercice n° 10



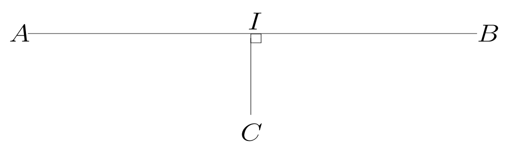
Soit AH la hauteur issue du sommet A, alors d'après le théorème de Pythagore, $AH^2+HC^2 = AC^2 = 8^2 = 64$. De plus, dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi la médiane et donc $HC = \frac{1}{2}\ AB = 4$, d'où $AH^2 = 64 - HC^2 = 64 - 16 = 48$. Alors $AH = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.

Exercice n° 11



1. Puisque C appartient au cercle de diamètre DE, le triangle EDC est rectangle en C.
2. La droite (EC) est perpendiculaire à (DC) et parallèle à Δ donc Δ est perpendiculaire à (DC). Puisque Δ passe par A et est perpendiculaire à (DC), c'est la hauteur issue de A dans le triangle ACD. De plus, $AC = AD$ car D appartient au cercle de centre A de rayon AC donc le triangle ACD est isocèle. Alors la hauteur Δ issue de A est la médiatrice du segment $[DC]$.
3. Dans un triangle isocèle ADC, la médiatrice du segment $[DC]$ est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$.

Exercice n° 12



L'élastique est représenté par le segment AB qui vaut 200cm, le point I est le milieu de AB et $CI = 15$ cm. Par construction on a $AC = BC$ donc la longueur de l'élastique après étirement est $AC + CB = 2AC$. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AI^2 + CI^2 = 100^2 + 15^2 = 5^2 \times 409$. On a $\sqrt{409} \approx 20.2$ donc $AC \approx 101$ cm. La longueur de l'élastique après étirement est alors approximativement de $2 \times 101 = 202$ cm, celui-ci s'est donc étiré d'environ 2 cm.

Exercice n° 13
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AH^2 + BH^2 = AB^2, \quad BH^2 + HC^2 = BC^2 \quad \text{et} \quad AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

Puisque $AH = 3$, $HC = 12$ et $AC = 15$, on obtient

$$(1) \quad BH^2 = AB^2 - 9, \quad (2) \quad BH^2 = BC^2 - 144, \quad (3) \quad AB^2 + BC^2 = 225.$$

En sommant (1) et (2), puis en utilisant (3), on déduit $2BH^2 = AB^2 + BC^2 - 153 = 225 - 153 = 72$, d'où $BH^2 = 36$ et donc $BH = 6$. De plus, d'après (1), $AB^2 = 36+9 = 45$ et donc $AB = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

Exercice n° 14
Les droite (AH) et (BK) sont perpendiculaire à la droite (HK). Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a $AH^2 + HG^2 = AG^2$ et $BK^2 + GK^2 = GB^2$. Or $AG = BG$ donc $AH^2 + HG^2 = BK^2 + GK^2$. De plus, $GK = HK - HG = 30 - HG$ donc $10^2 + HG^2 = 2^2 + (30 - HG)^2 = 2^2 + 30^2 - 60 \times HG + HG^2$, d'où $60 \times HG = 2^2 + 30^2 - 10^2 = 4 + 900 - 100 = 804$ et ainsi $HG = \dfrac{804}{60} = 13,4$ km.

Théorème de Thalès

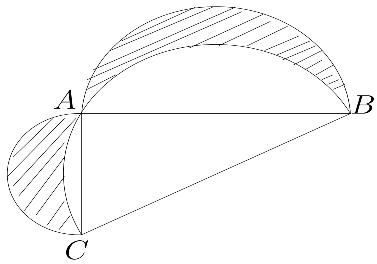
Exercice n° 15
On applique la réciproque du théorème de Thalès. Puisque $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AI}{AC}$, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Exercice n° 16
La hauteur de l'arbre est la longueur du segment BC. Or $BC = BH + HC$ et BH est la taille du bûcheron, il suffit donc de montrer que la longueur du segment HC est égal à la distance qui sépare le bûcheron de l'arbre. Autrement dit, il suffit de montrer que $CH = OH$.
Puisque (CH) et $(C'H')$ sont parallèles, on a, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{C'H'}{CH} = \dfrac{OH'}{OH}$. Or $C'H' = OH'$ donc $\dfrac{OH'}{CH} = \dfrac{OH'}{OH}$, d'où $CH = OH$.

Exercice n° 17
$aire(ABE) = aire(ABC) + aire(BCE)$ et $aire(BCE) \neq 0$ donc $aire(ABE) \neq aire(ABC)$. De plus, les droites (BC) et (DE) étant parallèles, quelque soient les point I et J de la droite (DE) on a $aire(BCI) = aire(BCJ)$. En particulier, en prenant $I = D$ et $J = E$, on a $aire(BCD) = aire(EBC)$. De même, on a $aire(BDE) = aire(CDE)$.

Exercice n° 18
Dans le triangle MCK la droite (MA) est la médiane issue du sommet M. Puisqu'une médiane coupe un triangle en deux triangles de même aire on a $aire(MCA) = aire(MAK)$. De même, dans le triangle MAB, la droite (AC) est la médiane issue du sommet A donc $aire(ABC) = aire(MCA)$. Alors $aire(MKC) = aire(MCA) + aire(MAK) = 2 \times aire(MCA) = 2 \times aire(ABC)$. De même, on a $aire(MBL) = aire(KAL) = 2 \times aire(ABC)$. Finalement, $aire(MKL) = aire(MKC) + aire(KAL) + aire(MBL) + aire(ABC) = 7 \times aire(ABC)$.

Exercice n° 19



(Les lunules sont les parties hachurées).
L'aire du demi cercle intérieur de diamètre $[AB]$ est $\frac{\pi}{4}$ AB^2, l'aire du demi cercle intérieur de diamètre $[AC]$ est $\frac{\pi}{4}$ AC^2 et l'aire du demi cercle extérieur de diamètre $[BC]$ est $\frac{\pi}{4}$ BC^2. L'aire des lunules est égale à la somme des aires des deux demi-cercles extérieurs et de l'aire du triangle ABC auxquelles on soustrait l'aire du demi-cercle extérieur. Alors l'aire des lunules est $\frac{\pi}{4}$ $AB^2 + \frac{\pi}{4}$ $AC^2 + aire(ABC) - \frac{\pi}{4}$ $BC^2 = \frac{\pi}{4}(AB^2 + AC^2 - BC^2) + aire(ABC)$. Or puisque le triangle est rectangle on a, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$ donc l'aire des lunules est égal à l'aire du triangle ABC.

Exercice n° 20

1. D'après le théorème de Pythagore, on a $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 100$ et $OB = 8$ donc $OA^2 = 100 - 64 = 36$, d'où $OA = 6$.
2. D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{HK}{OA} = \dfrac{BH}{BO}$. Alors $HK = 6 \times \dfrac{6}{8} = 6 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{2} = 4,5$.
3. On a $aire(OHKA) = aire(OAB) - aire(BHK) = \dfrac{OA \times OB}{2} - \dfrac{HK \times HB}{2} = 24 - 4.5 \times 3 = 24 - 13,5 = 10,5$.

Exercice n° 21
L'aire du triangle MNP ne dépend pas du point P du segment $[BC]$ choisit. On peut donc prendre pour P le point d'intersection de la hauteur issue de A (dans le triangle ABC) et de la droite (BC). Dans ce cas, l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}$ $AP \times BC$. Soit I le point d'intersection des droites (AP) et (MN). Les droite (MN) et (BC) étant parallèles, la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (MN) ainsi (PI) est la hauteur issue de P dans le triangle MNP. L'aire du triangle MNP est alors $\frac{1}{2}$ $PI \times MN$. Or d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AI}{AP} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$, d'où $PI = AP - AI = AP - \dfrac{1}{3}$ $AP = \dfrac{2}{3}$ AP et $MN = \dfrac{1}{3}$ BC. Alors, on obtient

$$aire(MNP) = \frac{1}{2}\ PI \times MN = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\ AP \times \frac{1}{3}\ BC = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\ AP \times BC\right) = \frac{2}{9} \times aire(ABC).$$