éléments de correction - **Arithmétique**

Exercice n° 1

1. a) $5\times6+2=32$ est la division euclidienne de 32 par 5 ou 6 (car $2<5$ et $2<6$), b) $3\times7+4=25$ est la division euclidienne de 25 par 7 (car $4<7$), c) $5\times7+15=50$ n'est pas une division euclidienne car $15>7$ et $15>5$, d) $3\times30+60=150$ n'est pas une division euclidienne car $60>3$ et $60>30$.
2. a) $69=3\times22+3$, b) $86=5\times17+1$, c) $68=8\times8+4$, d) $93=6\times14+9$, e) $49=4\times12+1$, f) $56=7\times8$.

Exercice n° 2
On a $2004=89\times22+46$ et $2004=22\times91+2$.

Exercice n° 3
D'après le tableau, on a

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000=995\times1\ 005\ 025\ 125\ 625+5\times625.$$

Puisque $5\times625=3125>995$, on effectue la division euclidienne de 3125 par 995. On obtient $3125=995\times3+140$, d'où

$$\begin{aligned}1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 &= 995\times1\ 005\ 025\ 125\ 625+995\times3+140\\ &= 995\times(1\ 005\ 025\ 125\ 625+3)+140=995\times1\ 005\ 025\ 125\ 628+140.\end{aligned}$$

Donc le division euclidienne de 1 000 000 000 000 000 par 995 donne un dividende de 1 005 025 125 628 et un reste de 140.

Exercice n° 4
158947 n'est pas paire donc pas un multiple de 2, n'est pas un multiple de 3 car $1+5+8+9+4+7=34$ n'est pas un multiple de 3, n'est pas un multiple de 5 car ne se termine pas par 5 ou et 0 et n'est pas non plus un multiple de 11 car $1-5+8-9+4-7=-8$ n'est pas un multiple de 11.

Exercice n° 5
$24=2^3\times3$ donc tout nombre divisible par 24 est divisible par 2, 3, 4, 6, 8 et 12. 242 421 n'est pas pair donc pas divisible par 24. $224\ 444=2\times212\ 222=4\times106\ 111$ et 106 111 n'est pas paire donc 224 444 n'est pas divisible par 8. $424\ 242=2\times212\ 121$ et 212 121 n'est pas paire donc n'est pas divisible par 4. $634\ 896=2\times317\ 448=4\times158\ 724=8\times79\ 3628\times3\times26\ 454=24\times26\ 454$ donc 634 896 est divisible par 24.

Exercice n° 6

1. $8=2^3$
2. On peut prendre $x=0$ et $x=3$ car $4^0=1=8^0$ et $4^3=64=8^2$.
3. On cherche tout les $x\in\mathbb{N}$ tel que $4^x=8^n$ où $n\in\mathbb{N}$. Cela est équivalent à $2^{2x}=2^{3n}$ donc à $2x=3n$, d'où $x=\frac{3n}{2}$.

Exercice n° 7
Le plus petit nombre divisible par $1, 2, 3, 4, 5, 6$ est le plus petit nombre divisible par $3, 4, 5$, soit $3\times4\times5 = 60$.

Exercice n° 8 On cherche les nombres $42ab$, où $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a, b \leq 9$, qui soient divibles par $2, 3, 6, 7$. Puisque 6 et 7 sont premiers entre eux (n'ont aucun diviseur en commun) alors ce nombre est divisible par 42, or les seuls mutiples de 42 de la forme $42ab$ sont 4200, 4242 et 4284.

Exercice n° 9 On détermine la plus grande puissance de 5 qui divise $126\,!$.
Méthode 1. On considère tout les multiples de 5 inférieur à 125 puis en les multipliant on obtient la plus grande puissance de 5 divisant $126\,!$.

Multiples de 5 inférieurs à 126	125	120	115	110	105	100	95	90	85	80	75	70
Puissances de 5	5^3	5	5	5	5	5^2	5	5	5	5	5^2	5

Multiples de 5 inférieurs à 126	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
Puissances de 5	5	5	5	5^2	5	5	5	5	5^2	5	5	5	5

Alors la plus grande puissance de 5 divisant $126\,!$ est les produit de toutes les puissances de 5 apparaissant dans les tableaux, soit $5^3 \times (5^2)^4 \times 5^{20} = 5^{31}$. On en déduit que $126\,!$ finit par 31 zéros.

Méthode 2. (Plus générale) Pour déterminer le nombre de zéros de $n!$, on utilise l'algorithme suivant : on effectue la division euclidienne de n par 5. Si le quotient est supérieur ou égal à 5, on effectue la division euclidienne de celui-ci par 5 et on continue de la même manière sur le nouveau quotient obtenu. Lorsque l'on obtient un quotient inférieur à 5 l'algorithme se termine et le nombre de zéros est égal à la somme des quotients calculés.
Pour $n = 126$, on obtient $126 = 5 \times 25 + 1$, $25 = 5 \times 5$ et $5 = 5 \times 1$, puisque $1 < 5$ l'algorithme s'arrète et on en déduit que $126\,!$ se termine par $25 + 5 + 1 = 31$ zéros.

Exercice n° 10
On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $132\times64^5\times81^9 = 6^n\times q$ où $q \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par 6. Puisque $6^n = 2^n\times3^n$, il suffit de déterminer la décomposition en nombres premiers de $132 \times 64^5 \times 81^9$ et de considérer ses puissances de 2 et 3.
On a $132 = 2\times66 = 2^2\times33 = 2^2\times3\times11$, $64^5 = (2^6)^5 = 2^{30}$ et $(81)^9 = (3^4)^9 = 3^{36}$. Donc $132\times64^5\times81^9 = 2^{32} \times 3^{37} \times 11 = 6^{32} \times 3^4 \times 11$. Puisque $3^4 \times 11$ n'est pas divisible par 6, la plus grande puissance de 6 qui divise $132 \times 64^5 \times 81^9$ est 6^{32}.

Exercice n° 11
Pour déterminer le nombre de diviseurs d'un entier, il suffit de déterminer sa décomposition en nombres premiers. On a

$$1176 = 2 \times 588 = 2^2 \times 294 = 2^3 \times 147 = 2^3 \times 3 \times 49 = 2^3 \times 3 \times 7^2.$$

On en déduit que les diviseurs de 1176 sont de la forme $2^n \times 3^p \times 7^q$, où $0 \leq n \leq 3$, $0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq q \leq 2$. Il existe $(3 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$ entiers de cette forme donc 1176 a 24 diviseurs.

Exercice n° 12

1.

$$a)\ \frac{82}{130} = \frac{41}{65},\quad b)\ \frac{52}{105}\ \text{(irréductible)},\quad c)\ \frac{76}{176} = \frac{19}{44},\quad d)\ \frac{65}{45} = \frac{13}{9},\quad e)\ \frac{47}{14}\ \text{(irréductible)},$$

$$f)\ \frac{12}{37} + \frac{10}{42} = \frac{12}{37} + \frac{5}{21} = \frac{12 \times 21 + 5 \times 37}{37 \times 21} = \frac{437}{777},$$

$g)\ \frac{44}{20}+27=\frac{11}{5}+\frac{135}{5}=\frac{146}{5},\quad h)\ \frac{19}{8}+\frac{12}{18}=\frac{19}{8}+\frac{2}{3}=\frac{3\times 19+2\times 8}{3\times 8}=\frac{57+16}{24}=\frac{73}{24}.$

2.
a) pgcd(2,11)=1 et ppcm(2,11)=22 b) pgcd(13,143)=13 et ppcm(13,143)=143,
c) pgcd(120,505)=5 et ppcm(120,505)=12 120, d) pgcd(23,51)=1 et ppcm(23,51)=1173,
e) pgcd(12,35)=1 et ppcm(12,35)=420, f) pgcd(64,56)=8 et ppcm(64,56)=448,
g) pgcd(12,13)=1 et ppcm(12,13)=156, h) pgcd(20,50)=10 et ppcm(20,50)=100,

$i)\ pgcd(2^3\times 5\times 3^3, 2\times 7\times 3^2)=2\times 3^2$ et $ppcm(2^3\times 5\times 3^3, 2\times 7\times 3^2)=2^3\times 3^3\times 5\times 7.$

Exercice n° 13
Les multiples communs à 216 et 270 sont des multiples de ppcm(216,270). On a pgcd(216,270)=54, d'où ppcm(216,270)=1080. Les multiples de 1080 entre 15000 et 20000 sont 15120, 16200, 17280, 18360, 19440.

Exercice n° 14
Les diviseurs communs à 1080 et 720 sont les diviseurs de pgcd(1080,720). Or on a $pgcd(1080,720)=360=2^3\times 3^2\times 5$. Donc pgcd(1080,720) a $4\times 3\times 2=24$ diviseurs.

Remarque. On a toujours que les diviseurs communs à p et q sont les diviseurs de $pgcd(p,q)$. En effet, supposons par l'absurde que m divise p et q mais ne soit pas un diviseur de $pgcd(p,q)$, alors $m\times pgcd(p,q)$ divise p et q. Ainsi $m\times pgcd(p,q)$ est un diviseur de p et q qui est plus grand que $pgcd(p,q)$ ce qui est en contradiction avec la définition du *pgcd*.

Exercice n° 15

a) pgcd(5,10)=5,
b) ppcm(1,8)=8.

Exercice n° 16
Les deux époux se rencontrent pour la première fois à partir de ppcm(15,27) jours. Puisque pgcd(15,27)=3, on a ppcm(15,27)=135. Les deux époux se rencontrent donc à partir de 135 jours. L'année 2000 est bissextile donc dure 366 jours, ainsi le nombre de fois que les époux se rencontrent est égal au quotient de la division euclidienne de 366 par 135, soit 2 fois dans l'année.

Exercice n° 17
Le nombre de carreaux de chaque coté est divisible par pgcd(95,235) donc le nombre de carreaux traversés par la diagonale doit être aussi divisible par pgcd(95,235)=5. Dans la liste des solutions proposées seul 325 est divisible par 5 donc le nombre de carreaux traversés par la diagonale est 325.

Exercice n° 18
On donne ci-dessous le cycle des jours passés à Rennes et à Brest (cycle dans le sens où la dernière ligne est la même que la première).

	Rennes	Brest
1^{er} au 10^e jour	D L M M J	V S D L M
11^e au 20^e jour	M J V S D	L M M J V
21^e au 30^e jour	S D L M M	J V S D L
31^e au 40^e jour	M M J V S	D L M M J
41^e au 50^e jour	V S D L M	M J V S D
51^e au 60^e jour	L M M J V	S D L M M
61^e au 70^e jour	J V S D L	M M J V S
71^e au 80^e jour	D L M M J	V S D L M

À partir du tableau, on obtient un cycle de 70 jours au bout duquel le cycle reprend, et on a aussi qu'en 70 jours la personne passe 5 dimanches à Rennes. On a $365 = 70 \times 5 + 15$ donc la personne passe $5 \times 5 = 25$ dimanches à Rennes plus ceux correspondant aux 15 derniers jours. Or, d'après le tableau (2 premières lignes), les 15 derniers jours de l'année cette personne passe 1 dimanche à Rennes, 1 dimanche à Brest puis un dimanche à Rennes. Finalement, la personne aura passé $25 + 2 = 27$ dimanches à Rennes dans l'année.

Exercice n° 19
Le 25 décembre est un mercredi donc le 1er janvier est un mercredi. 4 semaines plus tard on est encore un mercredi donc le 29 janvier est un mercredi, d'où le 1er février est un samedi. De plus durant les quatre premières semaines de janvier il y a 4 dimanche et les deux derniers jours sont jeudi et vendredi donc il y $4 + 0 = 4$ dimanche dans le mois de janvier 2002. En continuant le même raisonnement pour les mois suivant on obtient le tableau ci-dessous.

	Jan	Fev	Mars	Avr	Mai	Juin	Juillet	Août
1er Jour du mois	Me	S	S	M	J	D	M	V
Nbre de dimanches	4	4	5	4	4	5	4	4

Ainsi depuis le 25 décembre 2002, il s'est écoulé 1 dimanche en décembre puis $4+4+5+4+4+5+4+4 = 34$ dimanche de janvier à fin août. Il y a donc eu $1 + 34 = 35$ dimanche du 25 décembre 2002 à fin août. Soit n la somme recu par Elise le 25 décembre 2002 alors au 1er septembre 2003, celle-ci n'a plus que $x - 35 \times 3$ €. Donc on a $x - 35 \times 3 = 1$, d'où $x = 106$.

Exercice n° 20
On détermine tout d'abord le nombre de jours écoulés entre le 26 juin 1996 et le 26 mai 2001.

	26/06/96 → 31/12/96	1997	1998	1999	2000	01/01/01 → 26/05/01
Nbre de jours	188	365	365	365	366	146

Donc entre le 26 juin 1996 et le 26 mai 2001, il s'est écoulé $188 + 365 + 365 + 365 + 366 + 146 = 1795$ jours. La division euclidienne de 1795 par 7 donne $1795 = 256 \times 7 + 3$. On en déduit, puisqu'une semaine dure 7 jours, que 3 jours avant le 26 mai 2001 on était le même jour que le 26 juin 1996. Puisque le 26 mai 2001 était un samedi, le 26 juin 1996 était un mercredi.

Exercice n° 21
La division de 3242 par 99 donne $3242 = 99 \times 32,\overline{74}$ où $\overline{74}$ est un cycle qui se répète indéfiniment (*i.e.* $\overline{74} = 7474747474\ldots$). Le cycle étant de longueur 2, on obtient le vingtième chiffre après la virgule en effectuant la division euclidienne de 20 par 2. Puisque 20 est pair il est immédiat que le vingtième chiffre après la virgule est le dernier chiffre du cycle, soit 4.

Exercice n° 22
La division de 632 par 7 donne $632 = 7 \times 90,\overline{285714}$ où $\overline{285714}$ est un cycle qui se répète indéfiniment (*i.e.* $\overline{285714} = 285714285714285714\ldots$). Le cycle étant de longueur 6, on obtient le 99 ième chiffre après la virgule en effectuant la division euclidienne de 99 par 6. Puisque $99 = 6 \times 36 + 3$, le 99 ième chiffre après la virgule est le troisième chiffre du cycle, soit 5.

Exercice n° 23
Puisque $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$, on voit que le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2^n est 2, 4, 8, ou 6 de façon cyclique (*i.e.* si 2 est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2^n alors celui de 2^{n+1} est 4, celui de 2^{n+2} est 8 et celui de 2^{n+3} est 6). On a un cycle de longueur 4 donc pour déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2^{46} on effectue la division euclidienne de 46 par 4, soit $46 = 4 \times 11 + 2$. Alors, on a $2^{46} = 2^{4\times 11} \times 2^2$. Le dernier chiffre de l'écriture décimale de $2^{4\times 11}$ est 6 donc le dernier chiffre de l'écriture décimale de 2^{46} est celui de $6 \times 2^2 = 24$, d'où le dernier chiffre

de l'écriture décimale de 2^{46} est 4.

Exercice n$^{\text{o}}$ 24
On a $3^{100} = (3^{20})^5$. Puisque $3^{20} = 3486784401$, les 3 derniers chiffres de 3^{100} sont les trois derniers chiffres de 401^5. Après calcul, on obtient que les 3 derniers chiffres de 3^{100} sont 001.

Exercice n$^{\text{o}}$ 25
Les chiffre des unités de 243^{243} et de 3^{243} sont les mêmes. De plus, le chiffre des unités des puissances de 3 est cyclique de longueur 4. En effet, on a $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $2^3 = 27$, $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$ donc les chiffres des unités des puissances de 3 est 3, 9, 7 ou 1 de façon cyclique. Alors on effectue la division euclidienne de 243 par 4, soit $243 = 4 \times 80 + 3$. On obtient $3^{243} = 3^{4\times 80} \times 3^3$. Le chiffre des unités de $3^{4\times 80}$ est 1 et celui de 3^3 est 7 donc le chiffre des unités de 3^{243} est celui de 1×7 donc 7.

Exercice n$^{\text{o}}$ 26
Les nombres que l'on ne peut pas obtenir sont ceux tels que, après soustraction de 18, ne peuvent s'écrire comme une somme de 3 et de 5. Puisque $25 - 18 = 7$ celui-ci ne peut être obtenu. Pour les autres, on a $26 - 18 = 8 = 35$, $27 - 18 = 9 = 3 + 3 + 3$, $28 - 18 = 10 = 5 + 5$ et $29 - 18 = 11 = 3 + 3 + 5$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 27
L'écart entre deux piquets doit être un diviseur commun à 72, 48 et 60 donc doit diviser pgcd(72,48), pgcd(72,60), et pgcd(60,48). Or on a pgcd(72,48)=24, pgcd(72,60)=12 et pgcd(60,48)=12, ainsi l'écart entre deux piquets est un diviseur de 12. Le nombre minimal de piquets correspond alors au cas où l'écart est le plus grand soit un écart de 12m. Puisque $72 = 12 \times 6$, il y a 6 piquets sur le côté de 72m, de même il y en a 4 sur celui de 48m et 5 sur celui de 60m, ce qui fait un nombre minimal de piquets égal à $6 + 4 + 5 = 15$. Le nombre maximal de piquets correspond quant à lui au cas où l'écart est le plus petit soit un écart de 1m. On a alors un nombre maximal de piquets égal à $60 + 48 + 72 = 180$.