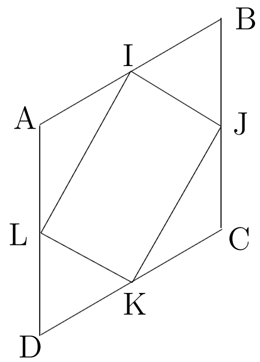
éléments de correction - **Géométrie 2**

Exercice n° 1

On a $AB = CD$ et $AD = BC$. On trace le segment AB, le cercle de centre A de rayon AC, puis le cercle de centre B de rayon BC l'intersection des deux donne le point C. Ensuite on trace le cercle de centre A de rayon AD et le cercle de centre C de rayon BC.

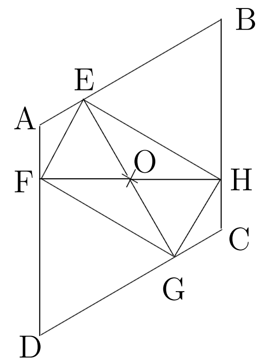
Exercice n° 2

a)



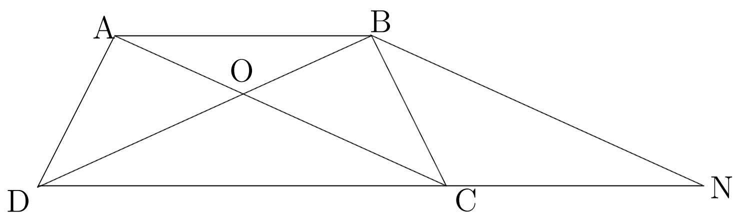
Les droites (IJ) et (AC) sont parallèles ainsi que les droites (LK) et (AC) donc les doites (IJ) et (LK) sont aussi parallèles. De même, les doites (IL) et (JK) sont parallèles donc le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme. De plus, les doites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et les doites (BD) et (JK) sont parallèles donc les doites (AC) et (JK) sont perpendiculaires. Puisque (LK) et (AC) sont parallèles on obtient que les droites (LK) et (JK) sont perpendiculaires. De la même manière, on obtient que $IJKL$ est un parallélogramme ayant quatre angles droits donc $IJKL$ est un rectangle.

b)



On a $aire(AOD) = aire(AOB)$ donc $AD \times FO = AB \times OE$ or $AB = AD$ donc $FO = OE$. De même, on obtient $FO = OE = OH = OG$. De plus, d'après le théorème de Pythagore, $FD^2 + FO^2 = OD^2 = OB^2 = OE^2 + EB^2 = FO^2 + EB^2$ donc $EB = FD$. Alors, d'après le théorème de Thalès en utilisant $AB = AD$, on obtient que les doites (FE) et (BD) sont parallèles. De même pour les droites (GH) et (BD) donc les doites (FE) et (GH) sont parallèles. Le même raisonnement entraîne que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme. De plus, $FH = FO+OH = EO+OG = EG$ donc les diagonales de $EFGH$ sont égales, d'où $EFGH$ est un rectangle.

Exercice n° 4



1. Les doites (AC) et (BN) sont parallèles ainsi que les doites (AB) et (CN). Donc le quadrilatère $ABNC$ est un parallélogramme, d'où $AB = CN$ et $AC = BN$. Alors $BD = AC = BN$ donc le triangle BDN est isocèle en B.

   Puisque le triangle BDN est isocèle en B, on a $\widehat{BDN} = \widehat{BND}$ et comme $ABNC$ est un parallélogramme on a $\widehat{BAO} = \widehat{BND}$ et $\widehat{BDN} = \widehat{ABO}$, d'où $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ donc le triangle ABO est isocèle en O.

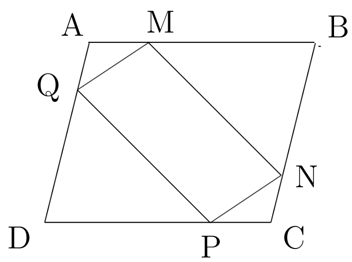
   De plus, puisque les doites (AB) et (DC) sont parallèles, $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$. De même $\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$, donc $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ d'où le triangle DOC est isocèle en O.

2. On $AO = OB, OD = OC$ et $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (angles opposés par le sommet) donc les triangles AOB et DOC sont égaux, on en déduit $AD = BC$ et ainsi le trapèze $ABCD$ est isocèle.

Exercice n° 5

Soit c le côté du carré, A son aire et P son périmètre. On a $A = c^2$ et $S = 4 \times c$. Après augmentation de 5% le nouveau côté vaut $c + \dfrac{1}{20}\,c$ donc l'aire vaut $c^2 + \dfrac{1}{10}c^2 + \dfrac{1}{400}\,c^2 = A + \dfrac{41}{400}\,A = A + \dfrac{10,25}{100}\,A$. Ainsi l'aire a augmlenté de 10,25%. La nouveau périmètre est $4 \times \dfrac{105}{100}\,c = \dfrac{105}{100}\,P$ donc le périmètre a augmenté de 5%.

Exercice n° 6



Les droites (AC) et (MN), (BD) et (NP), ainsi que (AC) et (PQ) sont parallèles donc les droites (PQ) et (MN) sont parallèles. Il reste donc à montrer que les droites (MQ) et (NP) sont parallèles. Puisque les droites (BD) et (NP) sont parallèles, il suffit de montrer que les droites (BD) et (MQ) sont parallèles. Pour cela on va utiliser la réciproque du théorème de Thalès, *i.e.* montrons que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AQ}{AD}$.

D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{CB}, \quad \frac{DP}{DC} = \frac{DQ}{DA} \quad \text{et} \quad \frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CD}.$$

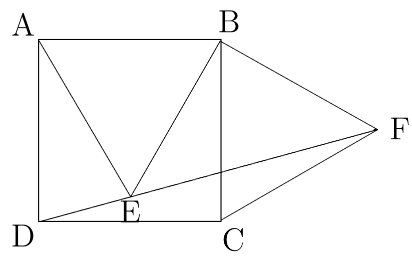
On obtient

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB - BM}{AB} = 1 - \frac{BN}{BC} = 1 - \frac{BC - CN}{BC} = \frac{CP}{CD},$$

et

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{AD - QD}{AD} = 1 - \frac{DP}{DC} = \frac{DC - DP}{DC} = \frac{CP}{DC} = \frac{AM}{AB}.$$

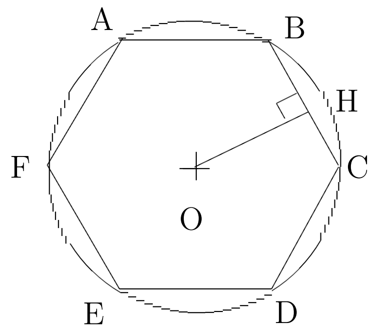
Exercice n° 7



On calcule l'angle $\widehat{DEF} = \widehat{DEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BEF}$.

Le triangle AEB est équilatéral donc $\widehat{AEB} = \widehat{EBA} = \widehat{BAE} = 60°$. Alors $\widehat{EAD} = \widehat{CBE} = 90 - 60 = 30°$. Le triangle AED est isocèle en A donc $\widehat{DEA} = \frac{1}{2}(180 - 30) = 75°$. Le triangle BFC est équilatéral donc $\widehat{FBC} = 60°$. Le triangle FBE est isocèle en B donc $\widehat{BEF} = \frac{1}{2}(180 - (30 + 60)) = 45°$. Finalement, on obtient $\widehat{DEF} = 75 + 60 + 45 = 180°$, donc les points D, E et F sont alignés.

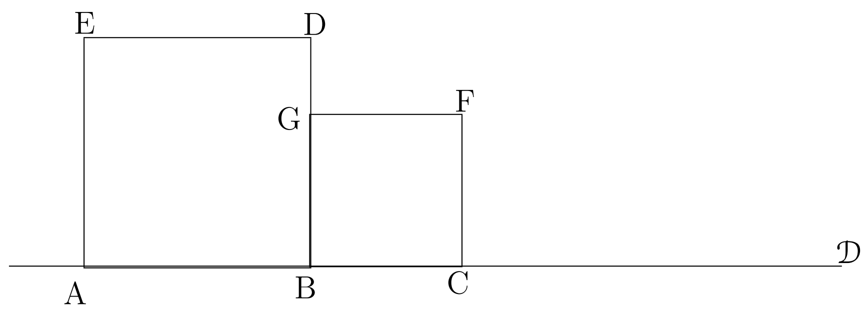
Exercice n° 8



a) Par construction, la droite (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FAB}$ donc $\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\ \widehat{FAB}$. Or les angles au sommet de l'hexagone valent 120°donc $\widehat{OAB} = 60°$. De plus, $AO = R = OB$ donc AOB est un triangle isocèle dont un des angles au sommet vaut 60°, d'où AOB est équilatéral. On en déduit $AB = R$.

b) D'après le théorème de Pythagore, on a $OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$ donc $OH = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Exercice n° 9

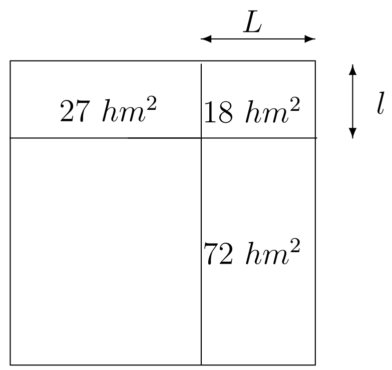


Soit O le point d'intersection des droites (AD) et (CG). Les droites (AD) et (CG) sont des diagonales des carrés $ABDE$ et $BCFG$ donc coupent, respectivement, en deux les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BCF}$. Donc $\widehat{BAO} = \widehat{BCO} = 45°$, d'où $\widehat{COA} = 180 - 45 - 45 = 90°$. Ainsi les droites (AD) et (CG) sont aussi perpendiculaires.

Exercice n° 10

L'octogone n'est pas régulier car $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2\alpha^2$ donc $AC = \sqrt{2}\alpha \neq \alpha$. L'aire de l'octogone est $5\alpha^2 + 2\alpha^2 = 7\alpha^2$. Son périmètre est $4 \times \sqrt{2}\alpha + 4\alpha = 4\alpha(1 + \sqrt{2})$. Enfin, l'octogone a plus de deux axes de symétrie et a 20 diagonales.

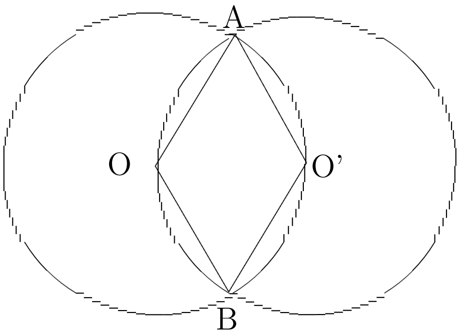
Exercice n° 13



Soit c le côté du carré. Le rectangle formé par les 2 petits rectangles supérieurs a pour aire $27 + 18 = 45 = c \times l$ donc $l = \dfrac{45}{c}$. De même, $c \times L = 90$ donc $L = \dfrac{90}{c}$. Or $(c - l) \times L = 72$ donc $\dfrac{(c^2 - 45) \times 90}{c^2} = 72$, d'où $c^2 = 45 \times 5 = 9 \times 25$. Ainsi, $c = 3 \times 5 = 15$.

Remarque. On peut partir de l'hypothèse que L et l sont entiers (il est seulement dit dans l'énoncé que c est un entier). Alors, c doit diviser $27 + 18 = 45 = 3^2 \times 5$ donc $c = 3, 9, 15$ ou 45. Or, d'après les réponses proposées, on ne peut alors avoir que $c = 15$.

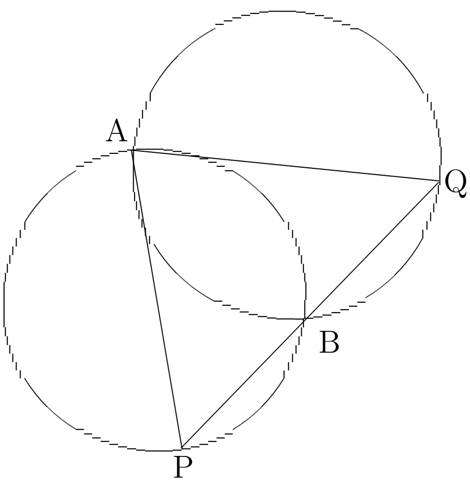
Exercice n° 14



a) D'après le théorème de l'angle inscrit $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$. Les triangles AOO' et BOO' sont équilatéraux donc $\widehat{OAO'} = \widehat{O'BO} = 60°$. La somme des angles du quadrilatère $AO'BO$ vaut 360°donc on a $2\widehat{AOB} + 2 \times 60 = 360$, d'où $\widehat{AOB} = 120°$.

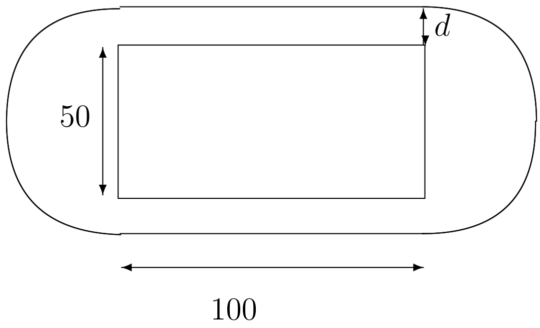
b)

Exercice n° 17



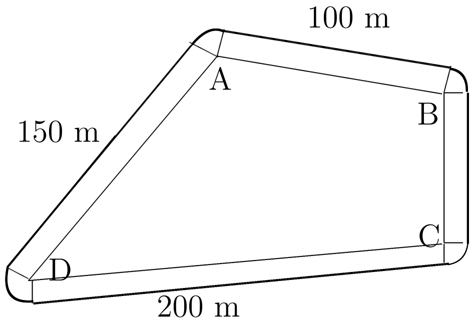
On a $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} + \widehat{BAQ} = 90 + 90 = 180°$ donc P, B et Q sont alignés.

Exercice n° 19



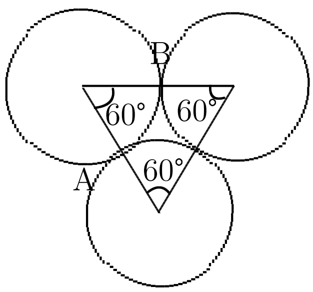
On a $200 + 2(25 + d)\pi = 400$ donc $d = \dfrac{100 - 25\pi}{\pi} \simeq 6,85$.

Exercice n° 20



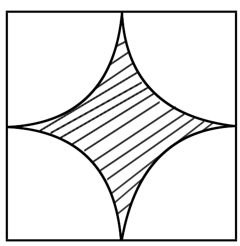
Le trajet de la sentinelle est donné sur la figure (celle-ci n'est pas à l'échelle) : on trace les parallèles à $(AB), (BC), (CD)$ et (DA) avec un écart de 100 m et on trace des semi-cercles de centres A, B, C et D et de rayon 100 m. Alors la longueur de ce trajet est $100 + 50 + 200 + 150 = 500$ m à laquelle on ajoute les périmètres des semi-cercles. Puisque la réunion de ces semi-cercles forme un cercle de rayon 100 m la somme de leurs périmètres est $2\pi 100 \simeq 628$ m. La longueur d'un tour de ronde est donc $500 + 628 = 1128$m.

Exercice n° 21



Soit r le rayon des cercles. Alors le domaine fermé a le même périmètre qu'un demi-cercle de rayon r. Si le périmètre du domaine est $3m$ alors on a $\pi r = 3$. D'où $r = \frac{3}{\pi} \simeq 0.955$ m.

Exercice n° 22



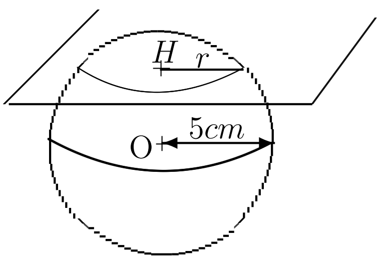
Le carré sur la figure a pour coté 2 cm donc son aire est 4 cm^2. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire de ce carré moins les aires des 4 quarts de disques de rayon 1 dont les centre sont les sommets du carré, donc l'aire du domaine est l'aire du carré moins celle du disque de rayon 1, soit $4 - \pi = 0,86\ cm^2$ ou encore $0,86 \times 10^2\ mm^2 = 86\ mm^2$.

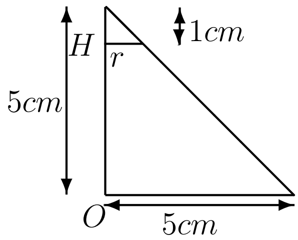
Exercice n° 23
On pose $c = 1 + \sqrt{2}$. La longueur totale des arêtes du cube est $16c = 16 \times (1 + \sqrt{2})$, l'aire d'une face est $c^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$, la surface totale du cube est $6 \times c^2 = 6 + 12\sqrt{2}$ et le volume du cube est $c^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4 = 7 + 5\sqrt{2}$.

Exercice n° 25
Le cube a pour volume $216 = 6^3$ donc son aire (surface totale) est $6 \times 6^2 = 216$.

Exercice n° 26
La surface totale du cube est 1 m^2 donc, si on note c son coté, on a $c^2 = \frac{1}{6}\ m^2$. Alors $c = \frac{1}{\sqrt{6}}\ m$ et donc le volume du cube est $c^3 = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ m^3$.

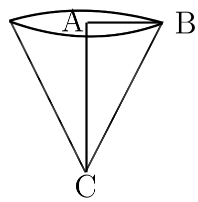
Exercice n° 27





Voir la figure. Soir r le rayon de $\mathcal{C}$. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{r}{5} = \frac{1}{5}$ donc $r = 1$. D'après le théorème de Pythagore, on a $OH^2 + r^2 = 5^2 = 25$ donc $OH = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Exercice n° 28



1. Par le théorème de Pythagore, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'où $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.
2. La courbe $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $AB = 6\ cm$. Sa longueur est donc 12π et l'aire de la surface qu'elle définit est $36\pi^2$.
3. Le volume du cône est $\frac{1}{3}\ 36\pi^2 \times AC = 96\pi^2$.

Exercice n° 29
On calcule le volume du cône C'. Soit I le centre de sa base et r' le rayon de cette base. Par le théorème de Thalès, on a $\frac{r'}{AH} = \frac{OI}{OH} = \frac{1}{2}$ donc $r' = \frac{r}{2}$. L'aire de la base du cône C' est donc $\frac{\pi\ r^2}{4} = \frac{S}{4}$. La hauteur du cône C' est $OI = \frac{h}{2}$ donc son volume est $\frac{1}{3}(\frac{S}{4} \times \frac{h}{2}) = \frac{V}{8}$ où V est le volume du cône C. Le volume du tronc R du cône est donc $V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}\ V$.

Exercice n° 30
On note OB la longueur de l'arète du cône C', alors d'après le théorème de Pythagore on a $OB^2 = r'^2 + OI^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ donc $OB = 5$. L'aire latérale est donc $3 \times 5\pi = 15\pi \simeq 47,10\ cm^2$.

Exercice n° 31
Toutes les faces qui sont des triangles sont des triangles rectangles, soit 4 triangles rectangles.

Exercice n° 32
Par le théorème de Pythagore on obtient $BD = EC = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$, $AD = \sqrt{BD^2+AB^2} = \sqrt{41+36} = \sqrt{77}$ et $AC = \sqrt{BC^2+AB^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$. On en déduit que ADC n'est pas isocèle. De plus, $AE = \sqrt{AB^2+EB^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \simeq 7,2 \neq AD$ et $AD \neq ED = 5$ donc le triangle AED n'est pas isocèle. AD est une arête de la pyramide $ABCDE$ donc la pyramide a une arête de longueur $\sqrt{77}$ cm. AE et AD sont des arêtes de la pyramide et $AE, AD \simeq 7,\ldots$ donc la pyramide a deux arètes dont la longueur est comprise entre 7 et 8 cm.

Exercice n° 33