Exercices supplémentaires - Développements limités

Exercice 1. Donner le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n.

$a)$ $\mathrm{ch}(x)$ $(n = 2p+1)$ $b)$ $e^x \cos x$ $(n=2)$ $c)$ $\tan x$ $(n=5)$

$d)$ $\dfrac{1+x^2+x^3-x^5}{1-x+x^2+x^6}$ $(n=2)$ $e)$ $\dfrac{x}{\sin x}$ $(n=4)$ $f)$ $\arctan(x)$ $(n=5)$

$g)$ $\arccos(x)$ $(n=5)$ $h)$ $e^{\cos x}$ $(n=5)$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

$a)$	$\ln(1-x)$	n quelconque	$i)$	$\dfrac{2x}{1-x^2}$	$n=3$
$b)$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$	$n=3$	$j)$	$\sin(2x)(e^{-1}-1)$	$n=3$
$c)$	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{1+2x}$	$n=3$	$k)$	$x\ln(1+x)$	$n=5$
$d)$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$n=4$	$l)$	$\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)$	$n=2$
$e)$	$(1-3\sin x)^{\frac{1}{x}}$	$n=2$	$m)$	$\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$	$n=3$
$f)$	$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$n=1$	$n)$	$e^x\sqrt{1+x}$	$n=3$
$g)$	$\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$	$n=3$			
$h)$	$\ln\left(\dfrac{1-x+x^2}{1+2\sin x}\right)$	$n=3$			

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

$$\mathbf{1)} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\frac{x}{2})+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}, \quad \mathbf{2)} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan(1+x)}{\arctan x}\right)^{x^2}, \quad \mathbf{3)} \lim_{x\to+\infty} \left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

On rappelle que : $\forall x>0, \quad \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

Exercice 4.

$a)$ Donner le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\cos(\sin x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos(\sin x) + x^2 - 2}{x^4}$.

Exercice 5. Donner le développement limité à l'ordre 4 en zéro de :

$$\frac{\cos x}{1+\tan x}, \quad \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{xe^x}{1-x^2} \quad \text{et} \quad \arctan(\sqrt{1+x}).$$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x^3}$, **2**) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos - \sqrt{2}}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$, **3**) $\lim_{x\to +\infty} x\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}\right]$.

Solutions

Exercice 1.

a) $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$, **b)** $e^x \cos x = 1 + x + o(x^2)$,
c) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$, **d)** $\dfrac{1+x^2+x^3-x^5}{1-x+x^2+x^6} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$,
e) $\dfrac{x}{\sin x} = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{7x^4}{360} + o(x^4)$, **f)** $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$,
g) $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{20} + o(x^5)$, **h)** $e^{\cos x} = e - \dfrac{ex^2}{2} + \dfrac{ex^4}{6} + o(x^5)$.

Exercice 2.

a) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$, **b)** $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$,
c) $\dfrac{\ln(1-x^2}{1+2x} = -x^2 + 2x^3 + o(x^3)$, **d)** $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$,
e) $(1-3\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}\left(1 + \dfrac{9x}{2} - \dfrac{47x^2}{4}\right) + o(x^2)$, **f)** $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{3} + o(x)$,
g) $\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} = o(x^3)$, **h)** $\ln\left(\dfrac{1-x+x^2}{1+2\sin x}\right) = -3x + \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{3} + o(x^3)$,
h) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{3} + o(x)$, **i)** $\dfrac{2x}{1-x^2} = 2x + 2x^3 + o(x^3)$,
j) $\sin(2x)(e^{-1}-1) = \left(2x - \dfrac{4x^3}{3}\right)(e^{-1}-1) + o(x^3)$,
k) $x\ln(1+x) = x^2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$, **l)** $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$,
m) $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{4}{3} - 2x + 3x^2 - \dfrac{7x^3}{3} + o(x^3)$,
n) $e^x\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{7x^2}{8} + \dfrac{17x^3}{48} + o(x^3)$.

Exercice 3.

1) $\dfrac{1}{4}$, **2)** $\exp\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$, **3)** $\dfrac{1}{8}$.

Exercice 4.

a) $\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$, *b)* $\dfrac{5}{12}$.

Exercice 5.

$\dfrac{\cos x}{1+\tan x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{29x^4}{24} + o(x^4)$, $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$,

$$\frac{xe^x}{1-x^2} = x+x^2+\frac{3x^3}{2}+\frac{7x^4}{6}+o(x^4), \quad \arctan(\sqrt{1+x}) = \frac{\pi}{6}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{7x^3}{96}-\frac{13x^4}{384}+o(x^4).$$

Exercice 6.

1) $\frac{1}{6}$, **2)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, **3)** $-e^2$.