Algèbre Licence 3 MASS

David Manceau

Table des matières

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

1.1 Rappels sur les applications linéaires et matrices

Dans la suite, on suppose connu les notions de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et de matrice. L'ensemble des $m \times n$ matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$.

1.1.1 Noyau, Image et rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, où $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. On dit qu'une application $u : E \to F$ est linéaire si

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x, y \in E, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y). \tag{1.1.1}$$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Pour $E = F$, on note simplement $L(E)$ et tout élément de $L(E)$ est appelé un endomorphisme de E.

Remarque 1.1.2.

1. L'ensemble $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. L'ensemble $L(E)$ est stable par composition, *i.e.*

$$\forall\, u, v \in L(E), \quad u \circ u \in L(E)$$

En effet, soient $u, v \in L(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ alors

$$u \circ v(\lambda x + y) = u\big(v(\lambda x + y)\big) = u\big(\lambda v(x) + v(y)\big) = \lambda u \circ v(x) + u \circ v(y).$$

En particulier, $u^n := \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}} \in L(E)$.

Définition 1.1.3. Soit $u \in L(E, F)$. On appelle

1. Noyau de u, noté $\mathrm{Ker}(u)$, l'image réciproque de $\{0\}$ par u, *i.e.*

$$\mathrm{Ker}(u) := \{x \in E \mid u(x) = 0\}. \tag{1.1.2}$$

2. Image de u, noté Im(u), l'ensemble des images de E par u, *i.e.*

$$\operatorname{Im}(u) := \{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = u(x)\} = \{u(x) \mid x \in E\}\,. \tag{1.1.3}$$

Proposition 1.1.4. *Soit $u \in L(E,F)$. Alors Ker(u) est un s.e.v. de E et Im(u) est un s.e.v. de F.*

Démonstration. On a $0_E \in \operatorname{Ker}(u)$ et $0_F \in \operatorname{Im}(u)$. En effet, $u(0_E) = 0_F$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker}(u)$ et $y, y' \in \operatorname{Im}(u)$. alors, on a

$$u(\lambda x_1 + x_2) = \lambda \underbrace{u(x_1)}_{=0} + \underbrace{u(x_2)}_{=0} = 0,$$

donc $\lambda x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}(u)$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $y = u(x)$ et $y' = u(x')$, d'où

$$\lambda y + y' = \lambda u(x) + u(x') = u(\lambda x + x') \in \operatorname{Im}(u). \qquad \square$$

Remarque 1.1.5. Soit $u \in L(E)$. Alors, on a
i) u surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(u) = F$,
ii) u injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.
En effet, *i)* est immédiat. Pour *ii)*, par définition, u est injective si et seulement si, pour $x, y \in E$, $u(x) = u(y)$ entraîne $x = y$.
Si $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$. Soient alors $x, y \in E$ tels que $u(x) = u(y)$. On a $u(x - y) = 0$ donc $x - y \in \operatorname{Ker}(u) = \{0\}$, d'où $x = y$.
Si u est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$ alors $u(x) = 0 = u(0)$ donc $x = 0$.

Définition 1.1.6. Si E et F sont de dimensions finies et $u \in L(E,F)$, on appelle rang de u, noté rg(u), la dimension de Im(u).

Théorème 1.1.7. (*Théorème du noyau*)
Si E et F sont de même dimension finie n alors

$$\forall\ u \in L(E,F), \quad n = \dim\big(\operatorname{Ker}(u)\big) + \operatorname{rg}(u). \tag{1.1.4}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de Ker(u) que l'on complète en une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Soient $G :=\operatorname{Vect}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ et v définie par

$$\begin{array}{rrcl} v: & G & \longrightarrow & \operatorname{Im}(u) \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Alors $v \in L(G, \operatorname{Im}(u))$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(v)$ alors $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap G = \{0\}$, d'où $\operatorname{Ker}(v) = \{0\}$ et donc v est injective. Ainsi v est une bijection de G sur Im(u) et donc

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(G) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(u)\big).\square$$

Corollaire 1.1.8. *Si E et F sont de même dimension finie et $u \in L(E,F)$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes*
i) *u injective*
ii) *u surjective*

iii) u bijective

Démonstration. Par définition on a $iii) \Rightarrow i)$ et $iii) \Rightarrow ii)$.
i) $\Rightarrow$ **ii)**. Si u injective alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et donc $\dim(F) = \mathrm{rg}(u)$, d'où $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de F de même dimension que F donc $\mathrm{Im}(u) = F$ et u est surjective.
ii) $\Rightarrow$ **iii)**. Puisque u est surjective on a $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$ et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 0$, d'où u injective. $\square$

Exercice 1.1.9.

1. Soit $E = F = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. On définit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ en posant
$$\begin{cases} u(e_1) = & e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) = & 2e_1 - e_2 - e_3 \\ u(e_3) = & -e_1 + e_2 + 3e_3 \end{cases}$$
Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
2. Soit E l'e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-ensemble de E donné par
$$F := \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$
On pose
$$\forall\ f \in E, \quad \Phi(f) = (f(0), f(1)). \tag{1.1.5}$$
i) Montrer que $\Phi \in L(E, \mathbb{R}^2)$ et en déduire que F est s.e.v. de E.
ii) Montrer que Φ est surjective.
3. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ (l'e.v. des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4). On note $u(P)$, le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.
i) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donné par
$$P(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$
Expliciter $u(P)$
ii) Montrer que $u \in L(\mathbb{R}_4[X])$ puis déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

1.1.2 Matrice associée à une application linéaire

On suppose E et F de dimensions finies et de bases respectives
$$\mathcal{B}_E := \{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_F := \{f_1, \ldots, f_m\}.$$
Soit $u \in L(E, F)$ et $x \in E$ alors
$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) \quad \text{où} \quad x := \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$
Or, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $a_{ij} \in \mathbb{K}$ avec $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que
$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i. \tag{1.1.6}$$

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de coefficients a_{ij} alors on a

$$u(x) = AX \quad \text{où} \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En effet, d'après (1.1.6) on a

$$AX = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) = u(x).$$

Réciproquement, si $A := (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on peut définir une application linéaire $u \in L(E, F)$ par (1.1.6).

Définition 1.1.10. Soit $u \in L(E, F)$. On appelle matrice associée à u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice A de coefficients a_{ij} donnés par (1.1.6). On note $A :=\text{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. Pour $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note simplement $A :=\text{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E)$.

Définition 1.1.11. Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $u \in L(E, F)$ telle que $A =\text{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ où $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont, respectivement, des bases de E et F. On appelle image, noyau et rang de A, l'image, le noyau et le rang de u, notés $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$ et $\text{rg}(A)$.

Remarque 1.1.12.

1. Dans la Définition 1.1.11, on identifie E à $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (et F à $M_{m,1}(\mathbb{K})$) de la façon suivante : si $x := x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$, l'élément correspondant dans $M_{n,1}$ est le vecteur colonne $X = (x_1 \ \ldots \ x_n)^T$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} &\text{Im}(A) = \{Y \in M_{m,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = AX\}, \\ &\text{Ker}(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}. \end{aligned}$$

2. $\text{rg}(A)$ correspond au nombre de colonnes et de lignes de A linéairement indépendantes.
3. $\text{rg}(A^T) =\text{rg}(A)$.

Exercice 1.1.13. Déterminer les noyaux et images des deux matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.1.14. Soit $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\text{Mat}(u \mid \mathcal{B}) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $f_1 := e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 := e_1 - e_2$ et $f_3 := e_1 - e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' := \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\text{Mat}(u \mid \mathcal{B}')$.

3. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 1.1.15. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B := A^T A$.

1. Montrer que : $\forall\, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad Y^T Y = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
3. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T A)$.

Le résultat est encore vrai pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mais la démonstration en est plus compliquée.

Théorème 1.1.16. (*Théorème du rang*)(*Admis*)
Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang $r > 0$. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que

$$A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de M_r.

Corollaire 1.1.17. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang $r > 0$. Alors, il existe $F \in M_{m,r}(\mathbb{K})$ et $G \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ telles que rg(F) =rg$(G) = r$ et $A = FG$.*

Détermination du rang d'une matrice par la méthode de Gauss
Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, \ldots, L_m$. Si l'on échange une ligne L_i de A par une combinaison linéaire de lignes de A de la forme $\alpha L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$, avec $\alpha \neq 0$, on ne change pas le rang (car le nombre de lignes linéairement indépendantes reste le même).

Méthode. On transforme les lignes de A afin d'obtenir une matrice A' dont les lignes L'_i s'écrivent $L'_i = (\underbrace{0, \text{——}, 0}_{(i-1)\text{-fois}}, \ldots)$. Alors, si il existe $r > 0$ tel que, pour tout $i > r$, on a $L'_i = (0, \text{———}, 0)$ on obtient $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = r$.

Exemple 1.1.18. On considère la 4×5 matrice A donnée par

$$A := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}.$$

Soit A_1 la matrice obtenue en échangeant les lignes de A de la façon suivante :

$$L_2 \to L_2 - L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \to L_3 - 2L_1,$$

alors

$$A_1 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}.$$

Soit A_2 celle obtenue en faisant le changement $L_4 \to L_4 - 2L_2$, alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}.$$

Finalement, $L_4 \to L_4 + L_3$, donne

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui entraîne $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_3) = 3$.

Exercice 1.1.19. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lien entre les opérations des matrices et des applications linéaires.

Combinaison linéaire.
Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ deux bases de E et F de dimensions n et m. Soient $u, v \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mat}(u+v \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mathrm{Mat}(v \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \\ &\mathrm{Mat}(\lambda u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda\ \mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F). \end{aligned}$$

Multiplication de matrices.
Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $l \geq 1$ et de base $\mathcal{B}_G := \{g_1, \dots, g_l\}$. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. On pose

$$A := \mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F), \quad B := \mathrm{Mat}(v \mid \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \quad \text{et} \quad C := \mathrm{Mat}(v \circ u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)$$

On note $\mathcal{B}_E := \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}_F := \{f_1, \dots, f_m\}$. D'après (1.1.6), on a pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$

$$v \circ u(e_j) = \sum_{i=1}^{l} c_{ij} g_i \quad \text{et} \quad \begin{aligned} v \circ u(e_j) &= v\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} v(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sum_{i=1}^{l} b_{ik} g_i, \end{aligned}$$

d'où par identification

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} \quad i.e. \quad C = BA,$$

ce qui donne la formule

$$\mathrm{Mat}(v \circ u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathrm{Mat}(v \mid \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F). \tag{1.1.7}$$

1.1.3 Matrices inversibles

Définition 1.1.20. On note $GL_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles, *i.e.*

$$GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \exists\ B \in M_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA = I_n\}$$

Proposition 1.1.21. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée*

i) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *;*
ii) $\mathrm{Im}(A) = M_{n,1}(\mathbb{K})$ *;*
iii) $\exists\ B \in M_n(\mathbb{K}), \quad AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$.

Démonstration. *i)* et *ii)* sont immédiat en considérant $u \in L(\mathbb{K}^n)$ telle que $A =\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$.
iii) L'implication $\big(A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow iii)\big)$ est évidente. Montrons l'implication inverse.
Si il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(B)$ alors $x = ABx = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$, d'où B est inversible et on a $BA = B(AB)B^{-1} = B(I_n)B^{-1} = I_n$. Ainsi A est inversible.
Si il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors pour $x \in \mathrm{Ker}(A)$, on a $x = BAx = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. □

Corollaire 1.1.22. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Théorème 1.1.23. (*Admis*) *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si* $\det(A) \neq 0$, *et dans ce cas on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \tilde{A}^T, \tag{1.1.8}$$

avec $\tilde{A}$ est la matrice des cofacteurs de A, i.e.

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij}),$$

où A^{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Exemple 1.1.24.

1. En dimension 2, soit $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ donnée par
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$
d'où, si $ad - bc \neq 0$, on obtient
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. En dimension 3, soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
On a, par exemple,
$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$$
$$\text{et} \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$
Finalement, on obtient
$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 24 & -15 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.1.25. On considère les deux systèmes linéaires suivants :
$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcr} x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 & = & -2 \end{array} \right. , \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 12 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = & 24 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 36 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 72 \end{array} \right. .$$
Montrer que (S_1) et (S_2) admettent des solutions uniques et les calculer.

1.1.4 Changement de bases et matrices similaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et m. Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
On considère $u \in L(E,F)$ et $A :=\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, $B :=\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$. Quel est le lien entre A et B ?

Définition 1.1.26.

1. Les matrices A et B sont dites similaires. Lorsque $E = F$, $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F$ on dit que A et B sont semblables.
2. Soit P la matrice associée à l'application identité sur E dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$, *i.e.*
$$P := \mathrm{Mat}(id_E \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E). \tag{1.1.9}$$
On appelle P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$.

Proposition 1.1.27. *Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$ alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'_E$ à la base $\mathcal{B}_E$.*

Démonstration. En effet, soit Q :=Mat$(id_E \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E)$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'_E$ à la base $\mathcal{B}_E$. Alors on a, d'après (1.1.7),
$$PQ = \mathrm{Mat}(id_E \mid \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_E) = I_n \quad \text{et} \quad QP = \mathrm{Mat}(id_E \mid \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = I_n \qquad \square$$

Remarque 1.1.28. Si $\mathcal{B}_E := \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}'_E := \{e'_1, \dots, e'_n\}$, il existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tels que l'on a
$$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \quad e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i. \tag{1.1.10}$$
Alors $P = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ d'après (1.1.9) et (1.1.6).

Théorème 1.1.29. *Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_F$ à la base $\mathcal{B}'_F$, alors on a*
$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n$. On pose
$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$
On a d'après (1.1.10)
$$\sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) e'_i,$$
d'où, puisque $P = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $X = PX'$.
De même, on note $\mathcal{B}_F := \{f_1, \dots, f_m\}$ et $\mathcal{B}'_F = \{f'_1, \dots, f'_m\}$. Soit $y \in F$, alors on a $y = y_1f_1 + \cdots + y_mf_m = y'_1f'_1 + \cdots + y'_mf'_m$. Si on pose
$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' := \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix},$$
on obtient $Y = QY'$. Puisque l'égalité $y = u(x)$ s'écrit $Y = AX$ et $Y' = BX'$ on en déduit
$$AX = Y = QY' = QBP^{-1}X,$$
pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. $\square$

Corollaire 1.1.30. *Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.*

Exemple 1.1.31. Soit $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\begin{cases} f_1 &= \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ f_2 &= -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $u \in L(\mathbb{R}^2)$ telle que $A :=\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B})$ est donnée par

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' := \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et P^{-1}.
3. Déterminer $B :=\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}')$.

1.2 Réduction des endomorphismes

Dans la suite on considère un espace vectoriel E de dimension finie n. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On va voir dans quels cas il est possible de déterminer une matrice semblable à A plus simple, *i.e.* réduite (triangulaire ou diagonale).

1.2.1 Polynôme caractéristique-Valeurs propres-Vecteurs propres

Définition 1.2.1. On appelle polynôme caractéristique de A, noté χ_A, le polynôme de degré n donné par

$$\forall\, T \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(T) := \det(A - TI_n).$$

Remarque 1.2.2. Si B est semblable à A alors on a $\chi_A = \chi_B$.

En effet, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} \chi_B(T) &= \det(PAP^{-1} - TI_n) = \det\big(P(AP^{-1} - TP^{-1})\big) \\ &= \det\big(P(A - TI_n)P^{-1}\big) = \det(P)\det(A - TI_n)\det(P^{-1}) \\ &= \chi_A(T). \end{aligned}$$

car $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$. En particulier, si $u \in L(E)$ on peut définir le polynôme caractéristique χ_u de u en posant $\chi_u := \chi_A$, où A est la matrice associée à u dans une base quelconque de E.

Dans la suite, on désigne par u l'endomorphisme associé à A dans une base donnée $\mathcal{B}_E$ de E.

Définition 1.2.3. On appelle valeurs propres de A (ou de u) les racines de χ_A. Si λ est racine de χ_A d'ordre m, *i.e.* $\chi_A(T) = (\lambda - T)^m Q(T)$ où $Q \in \mathbb{K}[T]$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, on dit que λ est valeur propre de multiplicité m.

Proposition 1.2.4. *Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Le vecteur X est appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Démonstration. On a les équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) = 0 &\iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \\
&\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
&\iff \exists\ X \in M_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0\}, \quad (A - \lambda I_n)X = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A n'a pas de valeur propre nulle.*

Démonstration. La matrice A a pour valeur propre 0 si et seulement si il existe X dans $M_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0\}$ tel que $AX = 0$ donc si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ ce qui est équivalent à $A \notin GL_n(\mathbb{K})$. $\square$

Remarque 1.2.6. En particulier, on obtient que 0 n'est pas valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

1.2.2 Diagonalisation

Définition 1.2.7. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale semblable à A, *i.e.* il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 1.2.8. Si A est diagonalisable, alors $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

En effet, puisque A et D sont semblables elles ont le même polynôme caractéristique. Or D a pour polynôme caractéristique $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(T - \lambda_i)$ qui a pour racines les λ_i.

Proposition 1.2.9. *La matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de A.*

Démonstration. En terme d'endomorphisme, on obtient, par définition, que A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}) = D$. On note $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ et $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\mathrm{Mat}(u \mid \mathcal{B}) = D$ si et seulement si $u(f_i) = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui est équivalent à $f_1, \ldots, f_n$ sont des vecteurs propres de A. $\square$

Définition 1.2.10. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le s.e.v. E_λ de E défini par $E_\lambda :=\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Remarque 1.2.11.

1. Le sous-espace propre E_λ est le s.e.v. formé des vecteurs propres associés à λ.
2. Si λ est une valeur propre de A de multiplicité m, alors on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m.$$

En particulier, si λ est valeur propre simple on a $\dim(E_\lambda) = 1$.

On dit qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si il admet toutes ses racines dans $\mathbb{K}$. En particulier, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout polynôme est scindé dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.2.12. Caractérisation (admis)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, i.e.

$$\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - T)^{m_i},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A de multiplicités respective $m_1, \ldots, m_p$. Alors A est diagonalisable si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Remarque 1.2.13. Si A n'a que des valeurs propres simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors les espaces propres correspondant vérifient, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$ =multiplicité de λ_i. On en déduit que si A n'a que des valeurs propres simples alors A est diagonalisable.

Méthode de diagonalisation.

1. Calculer χ_A et déterminer les valeurs propres λ_i avec leur multiplicité ;
2. Déterminer les sous-espaces propres associés et leurs dimensions
   - Si il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\dim(E_{\lambda_i}) \neq m_i$, alors A n'est pas diagonalisable ;
   - Sinon, pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, on choisit une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} pour construire une base $\mathcal{B}_E$ de E formée de vecteurs propres de A.

Exemple 1.2.14. Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ donnée par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique χ_A de A est

$$\chi_A(T) := \begin{vmatrix} 1-T & 2 & -2 \\ 2 & -3-T & 2 \\ -2 & 2 & 1-T \end{vmatrix}.$$

On échange la 3ème colonne par elle-même ajoutée à la seconde, ensuite on ajoute cette dernière à la première colonne on obtient

$$\chi_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ 1-T & -3-T & -1-T \\ 1-T & 2 & 3-T \end{vmatrix} = (1-T) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3-T & -1-T \\ 1 & 2 & 3-T \end{vmatrix},$$

en soustrayant à la 3ème ligne la 1ère, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= (1-T) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3-T & -1-T \\ 0 & 0 & 3-T \end{vmatrix} = (1-T)(3-T) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3-T & -1-T \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-T)(3-T) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3-T \end{vmatrix} = (1-T)(3-T)(-5-T). \end{aligned}$$

Donc A a trois valeurs propres simples $\lambda_1 := 1$, $\lambda_2 := 3$ et $\lambda_3 := -5$. Ainsi A est diagonalisable.

Déterminons les sous-espaces propres associés. Soit $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}$, alors

$$(A - 3I_3)X = 0 \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_2 & = x_3 \\ x_1 & = x_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, *i.e.* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_{λ_1}.
De même, on obtient

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

alors on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2.15. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2.16. Montrer, sans faire de calcul, que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 1.2.17. La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Trigonalisation

Problème. On a vu que A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A de multiplicité m, on a $\dim(E_\lambda) = m$. Si $\dim(E_\lambda) \neq m$, est-il possible d'obtenir une matrice réduite de A malgré tout ?

Définition 1.2.18.

1. On dit qu'une matrice $T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si les coeffiecients en dessous de la diagonale de T sont tous nuls, *i.e.* $T_{ij} = 0$ si $i > j$.
2. On dit que A est trigonalisable si il existe une matrice triangulaire supérieure semblable à A, *i.e.* il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Remarque 1.2.19. Si $T := (T_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure alors T est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

et donc le polynôme caractéristique de T est $\chi_T(X) = (\lambda_1 - X)\dots(\lambda_n - X)$. En particulier, si A est trigonalisable on en déduit que $A = PTP^{-1}$ avec T donnée par (1.2.1) où les λ_i sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de A.

Théorème 1.2.20. (*Admis*) *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé.*

Corollaire 1.2.21. *Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.*

Définition 1.2.22. On appelle bloc de Jordan associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ de taille $m \geq 1$ toute $m \times m$ matrice $J_m(\lambda) := \lambda I_m + J_m$ où J_m est la $m \times m$ matrice de coefficients

$$(J_m)_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i.e. les coefficients de J_m sont 1 au dessus de la diagonale et 0 partout ailleurs

Exemple 1.2.23. Les matrices suivantes sont des blocs de Jordan de tailles respectives 2, 3 et 4

$$J_2(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\mu) := \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_4(\nu) := \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Théorème 1.2.24. de Jordan (admis)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec pour multiplicité $m_1, \ldots, m_p$. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PTP^{-1}$ où T s'écrit

$$T := \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_1} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda_p} \end{pmatrix},$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, J_{λ_i} est le bloc de Jordan de taille m_i associé à la valeur propre λ_i.

Exemple 1.2.25. Soit C la matrice donnée par

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $\chi_C(T) = (2-T)^3$ donc, d'après le Théorème 1.2.24, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $C = PTP^{-1}$ où T est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminons P. La matrice P est une matrice de changement de base de la base canonique $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ à une base $\mathcal{B}' := \{f_1, f_2, f_3\}$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme tel que $A = \text{Mat}(u \mid \mathcal{B})$ alors on a $T = \text{Mat}(u \mid \mathcal{B}')$. On en déduit

$$\begin{cases} u(f_1) & = 2f_1 \\ u(f_2) & = f_1 + 2f_2 \\ u(f_3) & = f_2 + 2f_3 \end{cases}$$

Alors $f_1 := x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 2. On a

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

donc

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_1 & = x_3 \end{cases},$$

d'où $f_1 = x_1(e_1+e_3)$. En particulier on peut choisir $f_1 = (e_1+e_3)$. Pour déterminer $f_2 := y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, il suffit alors de résoudre $u(f_2) = f_1 + 2f_2$ ce qui donne

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rl} -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 & = 1 \\ y_1 + y_2 - y_3 & = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 & = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_2 & = \frac{1}{4} \\ y_3 & = y_1 + \frac{1}{4} \end{array}\right. ,$$

d'où $f_2 = y_1(e_1+e_3) + \frac{1}{4}(e_2+e_3)$. En choisissant $y_1 = 1$ on obtient $f_2 = e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{5}{4}e_3$. Pour finir on note $f_3 := z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$, alors on a

$$\left\{\begin{array}{rl} -2z_1 + 2z_2 + 2z_3 & = 1 \\ z_1 + z_2 - z_3 & = \frac{1}{4} \\ -z_1 + 3z_2 + z_3 & = \frac{5}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_2 & = \frac{3}{8} \\ x_3 & = x_1 + \frac{1}{8} \end{array}\right. ,$$

on peut donc choisir $f_3 = e_1 + \frac{3}{8}e_2 + \frac{9}{8}e_3$. Finalement un choix possible pour P est

$$P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2.26. Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2.27. La matrice suivante est-elle trigonalisable ? Si oui la trigonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Décomposition LU

La décomposition LU est une méthode directe de résolution du problème linéaire

$$AX = b, \tag{S}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sont les données du problème et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la solution.

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et, dans ce cas, on a $X = A^{-1}b$.
Le calcul de $X = A^{-1}b$ s'avère couteux numériquement, d'autant plus si l'on considère plusieurs problèmes (S_i) $AX_i = b_i$.

Une méthode alternative consiste à écrire A sous la forme $A = LU$ puis de résoudre successivement les deux systèmes $LY = b$ et $UX = Y$ avec L et U deux matrices triangulaires de sorte que la résolution de ces deux systèmes soit moins couteuse que le calcul de A^{-1}.

2.1 Matrices élémentaires

Définition 2.1.1.

1. Soient $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On appelle produit tensoriel de u et v la matrice $u \otimes v$ de coefficients $(u \otimes v)_{ij} := u_i v_j$.
2. Une matrice $E \in M_n(\mathbb{R})$ est dite élémentaire si elle est de la forme

$$E := I_n - u \otimes v \quad \text{où} \quad u, v \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ sont tels que } v^T u \neq 1.$$

Remarque 2.1.2.

1. Les coefficients e_{ij} d'une matrice élémentaire E sont donnés par $e_{ij} = \delta_{ij} - u_i u_j$, où δ_{ij} est le symbôle de Kronecker défini par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
2. Pour tout $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(u \otimes v)^2 = (v^T u) u \otimes v$.

En effet, posons $B := (u \otimes v)^2 = (b_{ij})$. On obtient

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (u \otimes v)_{ik} (u \otimes v)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_i v_k u_k v_j = u_i v_j \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k u_k}_{= v^T u}.$$

Proposition 2.1.3. *Toute matrice élémentaire $E := I_n - u \otimes v$ est inversible et son inverse est*
$$E^{-1} = I_n - \frac{1}{d}\, u \otimes v \quad \text{où} \quad d := 1 - v^T u.$$

Démonstration. Il suffit de calculer le produit EE^{-1} et d'utiliser la remarque précédente. □

On s'intéresse à trois types de matrices élémentaires :

1) *Matrices élémentaires de type 1 :* ce sont les matrices de la forme
$$E = I_n - u \otimes u \quad \text{où} \quad u := e_k - e_l,$$
avec $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1.4. *La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire de type 1 échange la k-ième ligne et la l-ième ligne (resp. la k-ième colonne et la l-ième colonne).*

Démonstration. Dans le cas $k = l$, E est simplement la matrice identité et le résultat est alors trivial. On considère donc le cas $k \neq l$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A = (L_1 \ldots L_n)^T$ où les L_i sont les lignes de A. On a $EA = (L'_1 \ldots L'_n)^T$ avec
$$\begin{aligned} L'_i &= \sum_{j=1}^n e_{ij} L_j = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - u_i u_j) L_j \\ &= L_i - \sum_{j=1}^n (\delta_{ik} - \delta_{il})(\delta_{kj} - \delta_{lj}) L_j \\ &= L_i - (\delta_{ik} - \delta_{il})(L_k - L_l), \end{aligned}$$
d'où $L'_i = L_i$ si $i \neq k, l$, $L'_k = L_l$ et $L'_l = L_k$. □

Exemple 2.1.5. Les matrices élémentaires de permutation de la 2ième et 3ème ligne en dimension 3 et 4 sont
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manière plus générale les matrices élémentaires de type 1 en dimension 3 sont les quatre matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1.6. L'inverse d'une matrice élémentaire de type 1 est elle-même.

2) *Matrices élémentaires de type 2 :* ce sont les matrices de la forme

$$E = I_n - (1-\alpha)e_k \otimes e_k, \quad \alpha \neq 0.$$

Proposition 2.1.7. *La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire de type 2 multiplie la k-ième ligne (resp. la k-ième colonne) par α.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A = (L_1 \dots L_n)^T$ où les L_i sont les lignes de A. On a $EA = (L'_1 \dots L'_n)^T$ avec

$$\begin{aligned} L'_i &= \sum_{j=1}^{n} e_{ij} L_j = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - (1-\alpha)\delta_{ki}\delta_{jk}) L_j \\ &= L_i - (1-\alpha)\delta_{ik} L_k, \end{aligned}$$

d'où $L'_i = L_i$ si $i \neq k$ et $L'_k = \alpha L_k$. □

Exemple 2.1.8. Les matrices élémentaires de type 2 en dimension 3 sont les trois matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

3) *Matrices élémentaires de type 3 :* ce sont les matrices de la forme

$$E = I_n + \alpha e_k \otimes e_l, \quad k \neq l.$$

Proposition 2.1.9. *La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire de type 3 ajoute à la k-ième ligne (resp. la l-ième colonne) la l-ième ligne (resp. k-ième colonnee) multipliée par α.*

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A = (L_1 \dots L_n)^T$ où les L_i sont les lignes de A. On a $EA = (L'_1 \dots L'_n)^T$ avec

$$\begin{aligned} L'_i &= \sum_{j=1}^{n} e_{ij} L_j = L_i + \alpha \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ki}\delta_{jl}) L_j \\ &= L_i + \alpha \delta_{ik} L_l, \end{aligned}$$

d'où $L'_i = L_i$ si $i \neq k$ et $L'_k = L_k + \alpha L_l$.
Pour les colonnes, on note $A = (C_1 \dots C_n)$ et $AE = (C'_1 \dots C'_n)$, alors

$$\begin{aligned} C'_j &= \sum_{i=1}^{n} e_{ij} C_i = C_j + \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jl} C_i \\ &= C_j + \alpha \delta_{lj} C_k. \end{aligned} \qquad \square$$

Exemple 2.1.10. Les matrices ci-dessous sont des matrice sélémentaires de type 3 en dimension 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Algorithme de Gauss sans pivot nul

Définition 2.2.1.

1. On dit qu'une matrice est unitaire si ses coefficients diagonaux sont 1.
2. On dit qu'une matrice $T := (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure si on a $t_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.
3. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet une décomposition LU si il existe une matrice triangulaire inférieure (Lower) unitaire L et une matrice triangulaire supérieure (Upper) U telles que $A = LU$.

Remarque 2.2.2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ admettant une décomposition LU avec $L := (l_{ij})$, $U := (u_{ij})$ alors on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L)\det(U) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}u_{ii} \quad \text{car } L \text{ et } U \text{ sont triangulaires} \\ &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{car } L \text{ est unitaire.} \end{aligned}$$

En particulier, A est inversible si et seulement si $u_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

À travers un exemple, on va déterminer par l'algorithme de Gauss si une matrice donnée admet une décomposition LU.

Exemple 2.2.3. On considère la matrice A suivante :

$$A := (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix}.$$

On va transformer A en une matrice triangulaire supérieure en utilisant des opérations sur ses lignes, *i.e.* en multipliant celle-ci à gauche par des matrices élémentaires de type 3. On note $A^{(1)} = A$. L'algorithme de Gauss consiste à obtenir à chaque étape $i > 1$ la matrice $A^{(i)} = (L_1^{(i)} \ldots L_n^{(i)})^T$ déduite de $A^{(i-1)}$ par des opérations sur ses lignes et telle que, pour tout $i-1 < j \leq n$, le $(i-1)$-ième coefficient de la ligne $L_j^{(i)}$ est nul. On a

$$A^{(2)} = E_2E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad E_1 := I_3 - 2e_2 \otimes e_1 \text{ et } E_2 := I_3 - 3e_3 \otimes e_1,$$

$$A^{(3)} = E_3A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad E_3 := I_3 - 4e_3 \otimes e_2.$$

L'algorithme de Gauss s'arrète à l'étape $n = 3$ et la matrice $U := A^{(3)}$ obtenue est triangulaire supérieure. On a alors $U = E_3E_2E_1A$. On pose $L := E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} L &= I_3 - 2e_2 \otimes e_1 - 3e_3 \otimes e_1 - 4e_3 \otimes e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la matrice L obtenue est triangulaire inférieure et unitaire, donc la matrice A admet bien une décomposition LU.

L'algorithme de Gauss général consiste à poser $A^{(1)} := A$ puis à définir $A^{(i+1)}$ pour tout $i > 0$ par récurrence de la façon suivante :

$$A^{(i+1)} := (L_1^{(i+1)} \dots L_n^{(i+1)})^T$$

où les lignes $L_j^{(i+1)}$ sont données par

$$L_j^{(i+1)} = L_j^{(i)} - \alpha L_i^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j,i+1}^{(i+1)} & \dots & a_{j,n}^{(i+1)} \end{pmatrix},$$

la dernière égalité s'obtient en prenant $\alpha := \dfrac{a_{ji}^{(i+1)}}{a_{ii}^{(i)}}$.

On en déduit que l'algorithme de Gauss ne marche que si l'on a $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ pour tout i dans $\{1, \dots, n-1\}$. Le terme $a_{ii}^{(i)}$ est appelé le pivot de Gauss à l'étape i. On obtient donc que l'algorithme de Gauss permet d'obtenir la factorisation LU d'une matrice si à chaque étape le pivot de Gauss est non nul.

Exemple 2.2.4. Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on obtient

$$A^{(2)} = E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad E_1 := I_3 - 2e_2 \otimes e_1 \text{ et } E_2 := I_3 - 7e_3 \otimes e_1.$$

Puisque le pivot $a_{22}^{(2)} = 0$, il n'est pas possible de déterminer $A^{(3)}$ et donc A n'admet pas décomposition LU (par la méthode de Gauss).

On va voir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice admette à chaque étape un pivot de Gauss non nul.

Définition 2.2.5. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Les sous-matrices principales de A sont les matrices carrées d'ordre $i \in \{1, \dots, n-1\}$ de coefficients a_{hk} où $h, k \in \{1, \dots, i-1\}$.

Exemple 2.2.6. Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors A a deux sous-matrices principales qui sont 1 et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.2.7. (*Caractérisation*)(*admis*)
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet une décomposition LU si et seulement si toutes ses sous-matrices principales sont inversibles.
De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition (quand elle existe) est unique.

Remarque 2.2.8. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut admettre une décomposition LU sans être inversible (cf. Exercice 2.2.10).

Exemple 2.2.9. En reprenant l'exemple 2.2.4, la matrice A a pour sous-matrices principales 1 et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, cette dernière a un déterminant nul et donc n'est pas inversible, ainsi A n'admet pas de décomposition LU.

Exercice 2.2.10. Déterminer, lorsque cela est possible la décomposition LU des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Algorithme de Gauss avec pivot nul

Reprenons l'Exemple 2.2.4, on a

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

En permutant la 2ème et la 3ème ligne, on obtient

$$A^{(3)} := PA^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad P := I_3 - u \otimes u \quad \text{avec} \quad u := e_2 - e_3.$$

Alors, $U := A^{(3)}$ est triangulaire supérieure et on a $U = PE_2E_1A$. En remarquant que $P^2 = I_3$, on obtient $U = PE_2PPE_1PPA$. Or on a

$$G_2 := PE_2P = I_3 - 7P(e_3 \otimes e_1)P = I_3 - 7(Pe_3) \otimes (Pe_1) = I_3 - 7e_2 \otimes e_1.$$

et de même

$$G_1 := PE_1P = I_3 - (Pe_2) \otimes (Pe_1) = I_3 - e_3 \otimes e_1.$$

On pose $L := G_1^{-1}G_2^{-1} = I_3 + 7e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1$. Alors L est triangulaire inférieure unitaire et on a $PA = LU$.

Étudions un deuxième exemple en dimension 4 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice principale d'ordre 2 de A est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est nul et donc A n'admet pas de décomposition LU. On a

$$A^{(2)} := E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & -24 & -48 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} E_1 & := I_4 - 3e_2 \otimes e_1 \\ E_2 & := I_4 - 3e_3 \otimes e_1 \end{cases}.$$

Soit P la matrice de permutation de la deuxième et la troisième ligne, *i.e.* $P := I_4 - u \otimes u$, où $u := e_2 - e_3$. Alors on a

$$PA^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & -24 & -48 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^{(3)} := E_3PA^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & -24 & -48 \\ 0 & 0 & -24 & -58 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad E_3 := I_4 + 2e_4 \otimes e_2.$$

Finalement, on obtient

$$A^{(4)} := E_4A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & -24 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad E_4 := I_4 - e_4 \otimes e_3.$$

On pose $U := A^{(4)} = E_4E_3PE_2E_1A = E_4E_3PE_2PPE_1PPA$ ainsi que

$$G_1 := PE_1P = I_4 - 3e_3 \otimes e_1 \quad \text{et} \quad G_2 := PE_2P = I_4 - 2e_2 \otimes e_1.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} L \; &:= G_1^{-1}G_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = (I_4 + 3e_3 \otimes e_1)(I_4 + 2e_2 \otimes e_1)(I_4 - 2e_4 \otimes e_2)(I_4 - e_4 \otimes e_3) \\ &= I_4 + 3e_3 \otimes e_1 + 2e_2 \otimes e_1 - 2e_4 \otimes e_2 - e_4 \otimes e_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où $PA = LU$ avec L triangulaire inférieure unitaire, U triangulaire supérieure et P la matrice de permutation de la deuxième et la troisième ligne.

Remarque 2.3.1. Les sous-matrices principales de PA sont bien inversibles.

Définition 2.3.2. Une matrice de permutation P est un produit de matrices élémentaires de type 1, *i.e.* la multiplication à gauche par la matrice P permute des lignes.

Théorème 2.3.3. (*Admis*) *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, si A est inversible il existe une matrice de permutation P telle que PA admette une factorisation LU.*

Exercice 2.3.4. Les matrices ci-dessous admettent-elles une décomposition LU à une matrice de permutation près ? Si oui déterminer la décomposition.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 122 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résolution de systèmes linéaires de type Cramer

Exercice 2.3.5. À l'aide la décomposition LU, résoudre le système $Y = AX$ avec A, Y donnés ci-dessous :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -2 & -4 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 36 \\ 72 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Décomposition en valeurs singulières

3.1 Rappels sur l'orthogonalité et les matrices symétriques

3.1.1 Orthogonalité

Définition 3.1.1.

1. Un vecteur $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dit unitaire si $X^T X = 1$.
2. Une famille $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a
$$X_i^T X_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Si, de plus, les X_i sont unitaires, la famille est dite orthonormale.
3. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormale. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ orthogonale.

Proposition 3.1.2. *Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, A vérifie*
$$A \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A^T = A^{-1} \quad \textit{et} \quad \det(A) = \pm 1.$$

Démonstration. On note A_i la $i$ème colonne de A alors on a
$$A_i^T A_j = \delta_{ij}.$$
Or $A_i^T A_j = (A^T A)_{ij}$ donc $A^T A = I_n$. On en déduit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = A^T$ et $(\det(A))^2 = 1$.□

Remarque 3.1.3.

1. Par définition et d''après la Proposition 3.1.2, $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^T A = I_n$.
2. Toute matrice élémentaire de type 1 est orthogonale.

En effet, soit E une matrice élémentaire de type 1. Alors $E = I_n - u \otimes u$ avec $u = e_k - e_l$ $(k, l \in \{1, \ldots, n\})$. Donc $E^T = E = E^{-1}$.

Proposition 3.1.4. *Si $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ alors $PQ \in O_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. $(PQ)^T PQ = Q^T P^T PQ = Q^T Q = I_n$. □

Remarque 3.1.5. Toute matrice de permutation (Définition 2.3.2) est orthogonale.

En effet, si P est une matrice de permutation alors P est un produit de matrices élémentaires de type 1 qui sont orthogonales.

Théorème 3.1.6. (*Gram-Schmidt*)(*admis*)
Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet une base orthonormale.

Remarque 3.1.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et de base orthogonale $\{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $x \in E$. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Alors on a

$$e_j^T x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_j^T e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Définition 3.1.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F, noté $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F, *i.e.*

$$F^\perp := \{v \in E \mid \forall\, u \in F, \quad v^T u = 0\}.$$

Proposition 3.1.9. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. Soient $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base orthogonale de F et $x \in F \cap F^\perp$. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r$. Puisque $x \in F^\perp$, on a

$$0 = x^T x = \sum_{i=1}^{r} x_i^2,$$

d'où, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $x_i = 0$ et donc $x = 0$. □

Théorème 3.1.10. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, pour tout $x \in E$ il existe une unique décomposition*

$$x = u + v \quad \text{où} \quad u \in F \text{ et } v \in F^\perp. \tag{3.1.1}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base orthogonale de F complétée en une base orthogonale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. On pose $u := \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r \in F$ et $v := \alpha_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \alpha_n e_n$. Pour tout $i = 1, \dots, r$ on a, puisque $\{e_1, \dots, e_r\}$ est orthogonale,

$$e_i^T v = \sum_{j=r+1}^{n} x_j e_i^T e_j = \sum_{j=r+1}^{n} x_j \delta_{ij} = 0.$$

Comme $F =$Vect$\{e_1, \dots, e_r\}$ on en déduit $w^T v = 0$ pour tout $w \in F$ et donc $v \in F^\perp$. Il reste à montrer l'unicité de la décomposition. Supposons qu'il existe $u_1 \in F$ et $v_1 \in F^\perp$ tels que $x = u_1 + v_1$. Alors on a $u + v = u_1 + v_1$, d'où $u - u_1 = v - v_1$ donc $u - u_1, v - v_1 \in F \cap F^\perp$. Or $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc $u = u_1$ et $v = v_1$. □

Définition 3.1.11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. On appelle projection orthogonale de x sur F, notée $p_F(x)$, l'élément $u \in F$ correspondant à la décomposition (3.1.1) de x.

3.1.2 Matrices symétriques

Définition 3.1.12. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si on a $A^T = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

Proposition 3.1.13. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors, on a*

$$\forall\, X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \quad X^T AY = Y^T AX.$$

Démonstration. Soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ donnés par $X := (x_1, \dots, x_n)^T$ et $Y := (y_1, \dots, y_n)^T$. En notant $A = (a_{ij})$ on a $A^T = (a_{ji}) = A$, d'où

$$X^T AY = \sum_{i=1}^n x_i (AY)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = \sum_{j=1}^n y_j (AX)_j = Y^T AX. \square$$

Théorème 3.1.14. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de A sont réelles et, pour chacune d'elles, il existe un vecteur propre associé réel.*

Démonstration. Soit $\lambda := \alpha + i\beta$ une valeur propre de A et $Z := X + iY \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $AZ = \lambda Z$, d'où

$$A(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY).$$

En multipliant à gauche par $(X - iY)^T$, on obtient par la Proposition 3.1.13

$$(X-iY)^T A(X+iY) = X^T AX + Y^T AY = (\alpha+i\beta)(X-iY)^T(X+iY) = (\alpha+i\beta)(X^T X + Y^T Y),$$

ce qui donne $\beta = 0$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors de plus $A(X+iY) = \alpha(X+iY)$, d'où $AX = \alpha X$ et $AY = \alpha Y$. $\square$

Remarque 3.1.15. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et λ, μ deux valeurs propres disctinctes de A de vecteurs propres réels X et Y. Alors on a

$$\lambda X^T Y = (AX)^T Y = X^T AY = \mu X^T Y.$$

Puisque $\mu \neq \lambda$, on obtient $X^T Y = 0$. Autrement dit, X et Y sont orthogonaux. En particulier, on en déduit que si A admet n valeurs propres λ_i deux à deux distinctes alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Ce résultat est encore vrai sans supposer les valeurs propres de multiplicité un, plus précisément on a le

Théorème 3.1.16. (*Admis*) *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

Remarque 3.1.17. Toute matrice symétrique est ainsi diagonalisable donc son rang est égal à son nombre de valeurs propres non nulles. En particulier, on en déduit que $A \in S_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si toutes ses valeurs propres sont non nulles.

Définition 3.1.18. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On dit que A est :

1. positive si : $\forall\ X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T AX \geq 0$,
2. définie positive si : $\forall\ X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \quad X^T AX > 0$.

Théorème 3.1.19. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors*

1. *A est positive si et seulement si $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,*
2. *A est définie positive si et seulement si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Démonstration. Les deux cas se démontrant de la même manière, on ne considère que le cas 1. Soit $\mathcal{B}' := \{X_1, \ldots, X_n\}$ une base orthogonale de vecteurs propres de A associeé aux valeurs propres, non nécessairement distinctes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique. Alors, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On en déduit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$X_i^T AX_i = X_i^T PDP^{-1}X_i = e_i^T De_i = \lambda_i \quad \text{car} \quad Pe_i = X_i.$$

Ainsi, si A est positive on obtient $\lambda_i = X_i^T AX_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Réciproquement, supposons que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n$. On obtient alors

$$\begin{aligned} X^T AX &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j X_i AX_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j e_i^T De_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\lambda_i\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\lambda_i \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

À partir de la Remarque 3.1.17 on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.1.20. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Si A est définie positive alors $A \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Applications aux matrices rectangulaires.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $AA^T \in M_m(\mathbb{R})$ et $(AA^T)^T = AA^T$ donc $AA^T \in S_m(\mathbb{R})$. De même, on a $A^T A \in S_n(\mathbb{R})$

Proposition 3.1.21. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $A^T A$ est positive.*

Démonstration. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $B := A^T A$ et $Y := AX = (y_1, \ldots, y_n)^T$. On a $X^T BX = (AX)^T AX = Y^T Y = y_1^2 + \cdots + y_n^2 \geq 0$. □

D'après le Théorème 3.1.19, on en déduit que les valeurs propres de $A^T A$ sont positives ou nulles. De plus, d'après le Théorème 3.1.16, $A^T A$ est diagonalisable et donc son nombre de valeurs propres non nulles est égal à son rang qui (admis) est celui de A. On a donc le résultat suivant

Proposition 3.1.22. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$. Alors $A^T A$ a r valeurs propres strictement positives. En particulier, $A^T A$ est définie positive si $r = n$.*

Proposition 3.1.23. (*Admis*) *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$. Alors les r valeurs propres strictement positives de $A^T A$ et AA^T sont les mêmes.*

3.2 Décomposition en valeurs singulières

Définition 3.2.1. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres strictement positives de AA^T et $A^T A$ classées en ordre décroissant, *i.e.* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$. On appelle valeurs singulières $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de A les racines carrées des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, *i.e.*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sigma_i := \sqrt{\lambda_i}.$$

Exercice 3.2.2. Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $F \in O_m(\mathbb{R}), G \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs singulières de FAG et de A sont les mêmes.

Exercice 3.2.3. Soient $\alpha \neq 0$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Comparer les valeurs singulières de A et αA.

Théorème 3.2.4. (*Décomposition en valeurs singulières*)
Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$. Alors, il existe $P \in O_m(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T,$$

où $\Delta := diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

Ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

Corollaire 3.2.5. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$. Alors, il existe $P \in M_{m,r}(\mathbb{R})$ et $Q \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ telles que*

$$Q^T Q = P^T P = I_r \quad et \quad A = P \Delta Q^T,$$

où $\Delta := diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

Démonstration. D'après le Théorème 3.1.16, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^T A^T A Q = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note Q_1 la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres orthonormaux associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et Q_2 celle dont les colonnes sont formées des vecteurs propres orthonormaux associés à la valeur propre 0. Ainsi $Q_1 \in M_{n,r}(\mathbb{R})$, $Q_2 \in M_{n,n-r}(\mathbb{R})$ et on a (en écriture par blocs) $Q = (Q_1\ Q_2)$. On obtient alors

$$Q_1^T A^T A Q_1 = \Delta^2.$$

Soit $P = (P_1\ P_2) \in O_n(\mathbb{R})$ où

$$P_1 := AQ_1\Delta^{-1} \in M_{m,r}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_2 \in M_{m,m-r}(\mathbb{R}),$$

avec $\Delta^{-1} = \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1})$. Alors on a

$$\begin{aligned} P^T AQ &= \begin{pmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{pmatrix} A(Q_1\ Q_2) \\ &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1}Q_1^T A^T \\ P_2^T \end{pmatrix} A(Q_1\ Q_2) \\ &= (\Delta^{-1}Q_1^T A^T A \quad P_2^T A)(Q_1\ Q_2) \\ &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1}Q_1^T A^T AQ_1 & \Delta^{-1}Q_1^T A^T AQ_2 \\ P_2^T AQ_1 & P_2^T AQ_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $P_2^T P_1 = 0$, ce qui entraîne $P_2^T AQ_1\Delta^{-1} = 0$, d'où $P_2^T AQ_1 = 0$. De plus, on a $\Delta^{-1}Q_1^T A^T AQ_1 = \Delta$ et, par définition de Q_2, $AQ_2 = 0$. On obtient donc, d'après l'égalité précédente, $P^T AQ = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Méthode de décomposition en valeurs singulières.

1. Si $n < m$. On pose $B := A^T A \in M_n(\mathbb{R})$ et on calcule le polynôme caractéristique χ_B de B pour en déduire les valeurs propres strictement positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de $A^T A$ et AA^T.
2. Si $m < n$. On fait de même en posant $B := AA^T \in M_m(\mathbb{R})$.
   Distinguer les cas 1. et 2. permet d'avoir un polynôme caractéristique le plus simple possible à calculer
3. On détermine les sous-espaces propres caractéristiques de $A^T A$ et on en déduit une base orthormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres $X_1, \ldots, X_n$ de $A^T A$ associées au valeur propres (respectives) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0$.
4. On pose $Q = (Q_1\ Q_2)$ où Q_1 est la matrice dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_r$ et Q_2 celle dont les colonnes sont $X_{r+1}, \ldots, X_n$.
5. On pose $P_1 := AQ_1\Delta^{-1}$.

Alors on a $A = P_1\Delta Q_1^T$. Pour obtenir la décomposition exacte du Théorème 3.2.4, il suffit de déterminer $P_2 \in M_{m,m-r}(\mathbb{R})$ telle que $P := (P_1\ P_2)$ vérifie $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Remarque 3.2.6.

1. Les colonnes de P_1 sont des vecteurs propres orthogonaux de $A^T A$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.
2. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $AA^T = A^T A = A^2$. Soit λ une valeur propre non nulle de A et X une vecteur propre associé. On a $\lambda > 0$ et $A^2X = \lambda^2 X$ et donc les valeurs singulières de A sont les valeurs propres non nulles de A.

Exercice 3.2.7. Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2.8. Donner l'équation de l'image du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ par la matrice A de la question précédente, puis par la matrice B. Même question pour la matrice

$$C := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3.2.9. Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner l'équation de l'image du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ par la matrice C.