Licence 1 MASS - Analyse
Corrigé Devoir Libre n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. On pose

$$f(x) = \left(\frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x+1) = \frac{(1+x)^{1+x} - (1+x)}{\ln(1+x) - x}.$$

On détermine le développement limité de g en 0 à l'ordre 1. On a

$$\begin{aligned}(1+x)^{1+x} &= e^{(1+x)\ln(1+x)} = e^{(1+x)(x - \frac{x^2}{2})} + o(x^2)\\ &= e^{x + \frac{x^2}{2}} + o(x^2) = 1 + x + x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

De plus $\ln(1+x) - x = (x - \dfrac{x^2}{2}) - x + o(x^2) = -\dfrac{x^2}{2}$, donc

$$g(x) = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2,$$

d'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -2$.

Exercice 2.

1. On a $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$, d'où, puisque $\arctan(0) = 0$, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
   Si on note $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, on obtient

   $$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2 + x^2} = \frac{1}{1 + 2x + x^2} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2).$$

   Comme $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = x - x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

2. Pour $x > 0$, la fonctions $g : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ est dérivable et on a

   $$g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

   Donc g est constante or $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Remarque. Pour $x < 0$, on a de même $g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Pour $x > 0$, on a

   $$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   et

   $$\arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

4. On note

$$f(x) = \left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan(x)}\right)^{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\right).$$

En utilisant la division suivant les puissances croissantes, on obtient pour $x > 0$

$$\frac{\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + \frac{2}{\pi}x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{2}{\pi}x^2\right)\right) + o(1) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\pi}x^2\right)\right) + o(1) = \exp\left(\frac{2}{\pi}\right) + o(1), \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \exp\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x.$$

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On a

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x(x+1)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = 2\,\frac{1-x}{(1+x^2)^2}.$$

On obtient alors le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$1+\frac{\pi}{4}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{2}$

3. On a $f(-1) = -\frac{\pi}{4}$ et $f(0) = 1$. Comme f est continue et strictement croissante sur $[-1, 0]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in]-1, 0[$ tel que $f(c) = 0$.
4. D'après le tableau des variations, la tangente t_1 au point d'abscisse 1 est donnée par $t_1(x) = 1+\frac{\pi}{4}$ et se trouve au dessus du graphe de f. De plus, on a immédiatement que les droites d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ sont, respectivement, des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.